Вестник Евразийской науки / The Eurasian Scientific Journal https://esj.today

2020, №5, Том 12 / 2020, No 5, Vol 12 https://esj.today/issue-5-2020.html

URL статьи: https://esj.today/PDF/14SAVN520.pdf

Ссылка для цитирования этой статьи:
Фомина В.В., Аксенов Б.Г., Степанов О.А., Миронов В.В., Абросимова С.А. Решение задач промерзания-оттаивания грунта для систем теплогазоснабжения // Вестник Евразийской науки, 2020 №5, https://esj.today/PDF/14SAVN520.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

For citation:
Fomina V.V., Aksenov B.C., Stepanov O.A., Mironov V.V., Abrosimova S.A. (2020). Solving problems of soil freezing-thawing for heat and gas supply systems. *The Eurasian Scientific Journal*, [online] 5(12). Available at: https://esj.today/PDF/14SAVN520.pdf (in Russian)

УДК 624.139.2

ГРНТИ 67.21.19

Фомина Валентина Викторовна
ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет», Тюмень, Россия
Доцент кафедры «Бизнес-информатики и математики»
Кандидат технических наук
E-mail: fominavv@tyuiu.ru

Аксенов Борис Гаврилович
ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет», Тюмень, Россия
Профессор кафедры «Промышленной теплоэнергетики»
Доктор физико-математических наук
E-mail: aksenovbg@tyuiu

Степанов Олег Андреевич
ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет», Тюмень, Россия
Профессор кафедры «Промышленной теплоэнергетики»
Доктор технических наук
E-mail: stepanovoa@tyuiu.ru

Миронов Виктор Владимирович
ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет», Россия, Тюмень
Профессор кафедры «Водоснабжения и водоотведения»
Доктор технических наук
E-mail: mironovvv@tyuiu.ru

Абросимова Светлана Александровна
ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет», Тюмень, Россия
Старший преподаватель кафедры «Бизнес-информатики и математики»
E-mail: abrosimovasa@tyuiu.ru

Решение задач промерзания-оттаивания грунта для систем теплогазоснабжения

Аннотация. Прокладка инженерных коммуникаций в северных условиях осложняется явлениями промерзания-оттаивания грунта вокруг трубопровода и с дневной поверхности. Процессы фазового перехода влаги в грунтах обычно исследуются с помощью задачи Стефана, в которой решаются две краевые задачи теплопроводности для талой и мерзлой зоны с учетом дополнительного условия Стефана на фронте фазового перехода. Если эту задачу свести к одному уравнению теплопроводности, то в одном из коэффициентов возникает дельта-функция Дирака. Это отражает тот факт, что при температуре фазового перехода эффективная теплоемкость воды формально равна бесконечности. Но в тонкодисперсных грунтах фазовый переход происходит в некотором диапазоне температур, выраженный фронт отсутствует и поэтому переход к одному уравнению возможен. Для грубодисперсных грунтов можно с некоторой погрешностью дельта-функцию заменить на дельтаобразную функцию так, чтобы интегральная теплота фазового перехода была та же самая. Такая замена обычно применяется в численных методах так называемого сквозного счета. После этого из постановки задачи также исчезает фронт фазового перехода и становится возможной постановка задачи о промерзании-оттаивании в виде одного непрерывного нелинейного уравнения теплопроводности. В настоящей статье авторами предложен метод приближенного решения задачи промерзания-оттаивания влажного грунта для бесконечной осесимметричной одномерной области. Для искомого точного решения находятся оценки сверху и снизу. Для построения более точных оценок от исходного дифференциального уравнения переходим к его интегральному представлению с помощью формул Грина. Затем используем интегральные неравенства. Полученные оценки уточняются. Так продолжается до получения решения с любой заданной точностью. Максимальная величина абсолютной погрешности на каждой итерации равна разности верхней и нижней оценок. Метод рекомендуется к использованию непосредственно для технических расчетов, а также для оценки точности приближенных и численных методов в качестве эталонного.

Ключевые слова: промерзание-оттаивание; влажные грунты; фронт фазового перехода; задача Стефана; осесимметричная область; оценки решения

Введение

При прокладке инженерных коммуникаций в северных условиях приходится решать задачи промерзания-оттаивания грунта вокруг трубопровода и с дневной поверхности. Обычно решение получают на основе задачи Стефана [1]. Точные решения этой задачи либо получены при ограничительных предпосылках [1], либо не пригодны для практического применения. В инженерной практике используют различные приближенные методы [2–8], а при необходимости более строгого подхода – численные методы. Но в тонкодисперсных грунтах фазовый переход происходит в некотором диапазоне температур, поэтому возможен переход от задачи Стефана к одному уравнению теплопроводности с нелинейными коэффициентами. Для грубодисперсных грунтов можно с некоторой погрешностью дельта-функцию заменить на дельтаобразную функцию так, чтобы интегральная теплота фазового перехода была та же самая. Такая замена обычно применяется в численных методах так называемого сквозного счета. После этого из постановки задачи также исчезает фронт фазового перехода и становится возможной постановка задачи о промерзании-оттаивании в виде одного непрерывного нелинейного уравнения теплопроводности.

Для области с плоскопараллельной симметрией разработана и подробно изложена в работе [2] методика получения решения такой задачи в виде последовательности функций, поочередно ограничивающих искомое решение сверху и снизу. Эти функции получаются с применением дифференциальных и интегральных неравенств.

В работе [2] приведен краткий обзор применения дифференциальных и интегральных неравенств для построения приближенных решений. Нет смысла его повторять. Отметим лишь, что дифференциальные (теоремы сравнения Вестфаля) и интегральные неравенства использовали С.А. Чаплыгин, Л. Коллац, А.Н. Тихонов. Функции, мажорирующие искомое точное решение снизу и сверху они называли по-разному: «границы», «оценки». Мы используем термин «оценки». Непосредственно для решения задач промерзания-оттаивания и такую методику применяли Ю.С. Даниэлян [3], Р.И. Медведский [9] и др.

Если в задаче одно уравнение теплопроводности, то для построения уточненных оценок от исходного дифференциального уравнения переходим к его интегральному представлению с помощью формул Грина. Затем используем интегральные неравенства. Полученные оценки вновь уточняются. Так продолжается до получения решения с любой заданной точностью. Максимальная величина абсолютной погрешности на каждой итерации равна разности верхней и нижней оценок.

В работе [2] таким методом получено решение для ряда нелинейных задач теплопроводности, включая задачу о промерзании-оттаивании влажного грунта в разных постановках. Все задачи решались для плоскопараллельной одномерной области.

В настоящей работе изложен математический аппарат, позволяющий распространить результаты работы [2] на задачи теплообмена в области с осевой симметрией. Это нужно для решения задач промерзания-оттаивания вокруг труб.

Установлению приближенной взаимной зависимости между решениями одних и тех же задач для областей с разными видами симметрии посвящены работы Р.И. Медведского [9]. Но при этом результат получается с довольно значительной погрешностью.

Здесь мы используем другой подход. Дифференциальное уравнение для осесимметричной области формально представляется как некоторое уравнение для плоскопараллельной области со специальной функцией источника. Это позволяет при интегральном представлении использовать функцию Грина для плоскопараллельной области, которая имеет достаточно простой вид. Отметим, что все эти математические преобразования являются строгими и, следовательно, при переходе от одного вида симметрии к другому никакая дополнительная погрешность, в отличие от [9], не возникает.

Результирующая погрешность является контролируемой величиной и, в конечном итоге, сводится к погрешности численного интегрирования.

Метод, после необходимой модификации, может применяться для задач теплообмена во всех пространственных областях, для которых известны функции Грина.

1. Актуальность работы

Прокладка подземных коммуникаций в районах с низкой среднегодовой температурой осложняется сезонными процессами промерзания-оттаивания влажных грунтов, а также изменениями фазового состава влаги в результате длительного теплового воздействия трубопроводов на окружающий их грунт. Этим обусловливается исключительная роль, которую начинают играть процессы перераспределения тепла в грунтах, особенно в области распространения многолетнемерзлых пород. От распределения температур и тепловых потоков зависят не только физико-механические свойства грунтов, но и интенсивность развития криогенных процессов (пучение, трещинообразование и др.). Особое значение имеют теплофизические процессы в деятельном слое, являющемся объектом техногенных воздействий, а также непосредственно вблизи подземных коммуникаций. Здесь процессы теплообмена носят существенно нестационарный характер, причем с изменением температуры вследствие фазовых переходов влаги изменяются важнейшие прочностные характеристики грунта. Поэтому постоянно ведутся комплексные (как экспериментальные, так и теоретические) исследования, призванные обеспечить надежный долгосрочный прогноз температуры. Сказанным определяется важность изучения механизма теплообмена в грунтах,

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

создания надежных физических и математических моделей, разработки практических рекомендаций и методов расчета. Предлагаемое здесь решение может быть использовано непосредственно в инженерных расчетах температурных полей в осесимметричной области, а также для установления точности различных приближенных методов, для которых абсолютная величина максимальной погрешности неизвестна.

Научная новизна заключается в том, что сфера приложения метода построения сужающейся системы оценок расширена на область с осевой симметрией, а также на все области, для которых известны функции Грина. Сначала задача формулируется в виде нелинейного дифференциального уравнения в одномерной бесконечной осесимметричной области с соответствующими краевыми условиями. Используем теоремы сравнения и получаем две вспомогательные краевые задачи, решая которые находим первые, самые грубые, оценки искомой неизвестной температуры. Для построения уточненных оценок необходимо от дифференциальной постановки задачи перейти к интегральной. Сделать это можно с помощью функций Грина. Исходная задача поставлена в одномерной бесконечной осесимметричной области. Но мы хотим использовать функцию Грина для плоской полубесконечной области, которая имеет относительно простой вид. Для этого мы формальным образом второе слагаемое в правой части уравнения присоединяем к функции источника. Тогда формально получается уравнение для плоской полубесконечной области с такой специфической функцией источника. Для него записываем интегральное представление и на его основе получаем нужные нам уточненные оценки решения. Именно этот формальный математический прием позволяет распространить результаты работы [2] на задачи с осевой симметрией.

2. Постановка задачи

Задача теплообмена с фазовым переходом в тонкодисперсном влажном грунте в одномерной бесконечной осесимметричной области записывается следующим образом [3]:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{a^2}{r}\frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\chi}{c}\frac{\partial w(t)}{\partial \tau} \qquad (1)$$

$$\begin{gathered} t(r_0, \tau) = F(\tau), \quad t(r,0) = 0, \quad \tau > 0, \quad r > r_0 \\ |t(r,\tau)| < M, \quad M = const > 0, \quad F(0) = 0 \end{gathered} \qquad (2)$$

где $a^2 = \lambda / c$ – коэффициент температуропроводности, $t, c, \lambda, \tau, w, \chi$ – соответственно температура, теплоемкость, коэффициент теплопроводности, время, пространственная координата, содержание незамерзшей влаги, скрытая теплота фазового перехода воды, F(τ) – монотонная функция с ограниченной вариацией, дифференцируемая при $\tau > 0$. Переход от монотонных граничных условий к немонотонным подробно описан в работе [2].

Первые два слагаемых в правой части образуют произведение коэффициента a^2 на одномерный оператор Лапласа в цилиндрических координатах, а $\frac{\chi}{c}\cdot\frac{\partial w}{\partial \tau}$ – функция источника.

Здесь $\frac{\partial w(t)}{\partial \tau} = \frac{dw(t)}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial \tau}$, где $\frac{dw}{dt} > 0$ – экспериментально определяемая для данного типа грунта функция («кривая незамерзшей воды»).

Уравнение (1) можно преобразовать к виду:

14SAVN520
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

$$\left(C+\chi\frac{dw}{dt}\right)\frac{\partial t}{\partial \tau}=\lambda\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial t}{\partial r}, \tag{1a}$$

где $C+\chi\frac{dw}{dt}=C_{эф}$ – эффективная теплоемкость, в которой учитывается теплота фазового перехода.

Получение первых оценок решения задач (1)–(2) или (1а)–(2) не вызывает трудностей.

При монотонной функции F(τ), согласно теоремам сравнения, первые, самые грубые, оценки сверху и снизу t_1 *и* t_2 , между которыми находится искомое точное решение, определяются из решения двух уравнений вида (1а), в которые вместо $C_{эф}$ входят соответственно его наименьшее и наибольшее значения в данном диапазоне значений температуры, определяемом функцией F(τ).

Какая из оценок t_1 *и* t_2 является верхней, а какая нижней, зависит от того, возрастает F(τ) или убывает.

Эта стадия получения решения нам представляется простой, и мы на ней не будем больше останавливаться.

В работе [2] подробно описана и обоснована процедура получения таких оценок также и для случая немонотонной функции F(τ).

Основная трудность заключается в построении процедуры уточнения оценок. Сделать это на основе дифференциальной постановки задачи не удается.

3. Теоретическая часть

В этом разделе представлены результаты, определяющие научную новизну данной работы.

В правой части (1) два первых слагаемых – это оператор Лапласа в цилиндрической системе координат, умноженный на a^2, а третье слагаемое – функция источника.

Для интегрального представления задачи (1)–(2) нужно знать функцию Грина, а она имеет относительно простой вид только для плоской полубесконечной области [1].

Суть предлагаемого здесь подхода состоит в том, что уравнение (1) формально можно рассматривать как уравнение для плоской полубесконечной области $r>r_0$. В этом случае в правой части $\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}$ – оператор Лапласа, а два других слагаемых мы считаем функцией источника.

Такой формальный математический прием позволяет для одномерной задачи в цилиндрической системе координат использовать методы решения одномерной задачи в декартовой системе координат.

Тогда интегральное представление задачи (1)–(2) принимает вид:

$$t(r,\tau)=t_0(r,\tau)-\frac{\chi}{c}\int_{r_0}^{\infty}\int_0^{\tau}G(r,\xi,\tau-y)\cdot\frac{\partial w}{\partial y}d\xi\, dy+a^2\int_{r_0}^{\infty}\int_0^{\tau}\frac{\partial t}{\partial \xi}G(r,\xi,\tau-y)\frac{1}{\xi}d\xi\, dy \tag{3}$$

где $G(r,\xi,\tau-y)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a^2(\tau-y)}}\left\{\exp\left(-\dfrac{(r-\xi)^2}{4a^2(\tau-y)}\right)-\exp\left(-\dfrac{(r+\xi)^2}{4a^2(\tau-y)}\right)\right\}$ – функция Грина,

$t_0(r,\tau)$ – решение уравнения

$\dfrac{\partial t_0}{\partial\tau}=a^2\dfrac{\partial^2 t_0}{\partial r^2}$ – с условиями вида (2).

Чтобы избавиться от производных $\dfrac{\partial\, w(t(\xi,y))}{\partial\, y}$, $\dfrac{\partial\, t(\xi,y)}{\partial\,\xi}$ под знаком интеграла, применим формулу интегрирования по частям.

Получаем

$$t(r,\tau)=V(r,\tau)+\frac{\chi}{c}\int_{r_0}^{\infty}\int_0^{\tau}\psi(r,\xi,\tau-y)w(t(\xi,y))d\xi dy-a^2\int_{r_0}^{\infty}\int_0^{\tau}K(r,\xi,\tau-y)t(\xi,y)d\xi\, dy-$$
$$-\frac{a^2}{r_0}\int_0^{\tau}G(r,r_0,\tau-y)t(r_0,y)dy \qquad (4)$$

где

$$\psi(r,\xi,\tau-y)=\frac{\partial G(r,\xi,\tau-y)}{\partial y},\qquad K(r,\xi,\tau-y)=\frac{\partial\left(\frac{1}{\xi}G(r,\xi,\tau-y)\right)}{\partial\xi},$$

$$V(r,\tau)=t_0(r,\tau)+\frac{\chi}{c}w(t(r,0))\left\{erf\left(\frac{r}{2\sqrt{a^2\tau}}\right)-\frac{1}{2}erf\left(\frac{r+r_0}{2\sqrt{a^2\tau}}\right)+\frac{1}{2}erf\left(\frac{r-r_0}{2\sqrt{a^2\tau}}\right)\right\}$$
$$-\frac{\chi}{c}w(t(r,\tau))$$

Интегральное уравнение (4) имеет вид, пригодный для получения сужающейся системы оценок решения задачи (1)–(2). Пусть у нас есть оценки t_1,t_2 такие что $t_1\le t\le t_2$.

Определим ψ_1,ψ_2 следующим образом:

$$\psi_1=\psi,\psi_2\equiv 0 \text{ при } \psi>0$$

$$\psi_1\equiv 0,\psi_2=-\psi \text{ при } \psi\le 0.$$

Очевидно, что

$$\psi(r,\xi,\tau-y)=\psi_1(r,\xi,\tau-y)-\psi_2(r,\xi,\tau-y).$$

Аналогично определим K_1,K_2:

$$K_1=K,\quad K_2\equiv 0 \text{ при } K>0$$

$$K_1 \equiv 0, \quad K_2 = -K \text{ при } K \le 0 .$$

Тогда $K(r,\xi,\tau-y) = K_1(r,\xi,\tau-y) - K_2(r,\xi,\tau-y)$.

Используя оценки t_1, t_2 для $t(r,\tau)$, получим уточненные оценки t_3, t_4 из следующих выражений:

$$t_3(r,\tau) = V(r,\tau) + \frac{\chi}{c}\int_{r_0}^{\infty}\int_0^{\tau}\{\psi_1(r,\xi,\tau-y)w(t_1(\xi,y)) - \psi_2(r,\xi,\tau-y)w(t_2(\xi,y))\}d\xi\, dy -$$
$$- a^2\int_{r_0}^{\infty}\int_0^{\tau}\{K_1(r,\xi,\tau-y)t_1(\xi,\tau) - K_2(r,\xi,\tau-y)t_2(\xi,y)\}d\xi\, dy - \qquad (5)$$
$$- \frac{a^2}{r_0}\int_0^{\tau}G(r,r_0,\tau-y)\, t(r_0,y)dy$$

$$t_4(r,\tau) = V(r,\tau) + \frac{\chi}{c}\int_{r_0}^{\infty}\int_0^{\tau}\{\psi_1(r,\xi,\tau-y)w(t_2(\xi,y)) - \psi_2(r,\xi,\tau-y)w(t_1(\xi,y))\}d\xi\, dy -$$
$$- a^2\int_{r_0}^{\infty}\int_0^{\tau}\{K_1(r,\xi,\tau-y)t_2(\xi,\tau) - K_2(r,\xi,\tau-y)t_1(\xi,y)\}d\xi\, dy - \qquad (6)$$
$$- \frac{a^2}{r_0}\int_0^{\tau}G(r,r_0,\tau-y)\, t(r_0,y)dy$$

Очевидно, что $t_1 \le t_3 \le t \le t_4 \le t_2$.

Используя t_3 ,t_4, по формулам, аналогичным (5)–(6), получаем оценки t_5, t_6, и затем процедура повторяется рекуррентно.

В [2] приведено строгое доказательство сходимости подобной процедуры и показано, при каких условиях гарантируется эта сходимость. Выполнение условий сходимости нетрудно обеспечить.

Доказательство сходимости процедуры, а также описание экономной численной схемы, используемой для ее реализации, выходит за рамки данной работы.

Отметим только, что и то и другое строится по общей методике, изложенной в работе [2].

Итак, получена схема решения задачи промерзания-оттаивания грунта в одномерной осесимметричной области, которая представляет из себя процедуру получения сужающегося семейства оценок искомой функции сверху и снизу.

Важной особенностью такой процедуры является то, что на каждом шаге абсолютная величина максимальной погрешности известна и равна разности между верхней и нижней оценками. Искомое точное решение всегда находится между этими оценками. Вычисления продолжаем до получения нужной точности.

Еще раз отметим, что, хотя формулы (5)–(6) структурно несколько сложнее, чем формулы для аналогичной плоской задачи из работы [2], но никакой дополнительной погрешности за счет перехода к цилиндрическим координатам не возникает.

Необходимо также отметить, что аналогичное решение можно построить и для одномерной области с центральной симметрией. Такое решение особенно ценно при качественном исследовании процессов промерзания-оттаивания в областях сферической формы [10].

4. Численное моделирование

Для иллюстрации метода проведен расчет тестового примера. Расчет проводился с точностью 0,01 ^{0}C. Под точностью мы понимаем максимальную разность между верхней и нижней оценками. Реализация рекуррентной процедуры вида (5)–(6) проводилась по численной схеме, приведенной в работе [2].

В качестве граничного условия при $r = r_0$ принята функция

$$F(\tau) = A\sin(\omega\tau + \varepsilon),$$

где $A = 20^o C,\ \omega = 0{,}00071726,\ \varepsilon = 3{,}141592$.

Диапазон значений времени τ принят такой, чтобы эта функция была монотонно убывающей и $F(0) = 0$.

Содержание незамерзшей влаги грунта рассчитывалось по формуле:

$$w = \begin{cases} w_0 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}},\ \textit{если}\ t < 0 \\ w_0,\quad \textit{если}\ t \ge 0 \end{cases}$$

Функция $w_0 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$ качественно соответствует экспериментальной кривой незамерзшей воды в тонкодисперсных грунтах. Ее производная является унимодальной функцией, что упрощает получение оценок $t_1\ и\ t_2$, хотя данное свойство и не является обязательным.

Приняты следующие значения исходных данных:

$c = 500\ кДж/(м^3 \cdot К)$, $a^2 = 0{,}0028\ м/ч$, $\chi = 80\ кДж\,/\,м^3$, $w_0 = 0{,}3$, $r_0 = 0{,}25\ м$.

Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 1

Температура промерзания грунта (*(ч) – время, r(м) – радиус промерзания)

τ (ч)\r (м)	0,25	0,45	0,65	0,85	1,05	1,25	1,45	1,65	1,85	2,05
24	-0,3	-0,1	-0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
240	-3,4	-1,3	-0,7	-0,3	-0,3	-0,2	-0,1	-0,1	-0,1	-0,0
480	-6,8	-3,3	-1,2	-0,4	-0,3	-0,2	-0,2	-0,1	-0,1	-0,1
720	-9,9	-4,6	-1,8	-0,6	-0,3	-0,2	-0,2	-0,1	-0,1	-0,1
960	-12,7	-5,3	-2,5	-0,6	-0,3	-0,2	-0,2	-0,2	-0,2	-0,1
1200	-15,2	-5,8	-3,4	-0,7	-0,4	-0,3	-0,2	-0,2	-0,2	-0,1
1440	-17,2	-7,3	-4,1	-1,2	-0,5	-0,3	-0,3	-0,2	-0,2	-0,1
1680	-18,7	-9,1	-5,7	-2,2	-0,7	-0,4	-0,3	-0,3	-0,2	-0,1
1920	-19,6	-10,2	-6,9	-3,2	-0,9	-0,4	-0,3	-0,3	-0,2	-0,1
2160	-20,0	-10,4	-7,1	-3,3	-0,9	-0,4	-0,3	-0,3	-0,2	-0,1

Составлено авторами

Хорошо видно, как вокруг поверхности $r = r_0$ формируется слой промерзшего грунта.

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Заключение

Итак, получена схема решения задачи промерзания-оттаивания грунта в одномерной осесимметричной области, которая представляет из себя рекуррентную процедуру получения сужающегося семейства оценок искомой функции сверху и снизу. На каждом шаге абсолютная величина максимальной погрешности известна и равна разности между верхней и нижней оценками. Искомое точное решение всегда находится между этими оценками. Вычисления продолжаются до получения нужной точности. Результирующая погрешность является контролируемой величиной и, в конечном итоге, сводится к погрешности численного интегрирования.

Принципиально новым в теоретическом плане является расширение сферы приложения результатов обзорной работы [2] на область с осевой симметрией. Появляется возможность распространить на осесимметричную область и другие результаты работы [2]. Это касается, прежде всего, фронтовой задачи промерзания – оттаивания (классическая задача Стефана). Кроме того, таким методом могут быть решены нелинейные задачи фильтрации вблизи нефтяной или газовой скважины.

Показана возможность построения аналогичного решения для одномерной области с центральной симметрией. В принципе решение можно построить для любой области, для которой известна функция Грина.

Такое решение может быть использовано непосредственно в инженерных расчетах систем теплогазоснабжения, а также в качестве эталонного для установления точности различных приближенных и численных методов. При разработке новых методов решения очень важно иметь для сравнения такую процедуру, которая позволяет получить любую заданную точность.

Еще одним важным свойством полученного решения является то, что расчетные формулы (5)–(6) имеют явный аналитический вид. В некоторых случаях важно, чтобы решение имело аналитический вид. На основе таких выражений могут быть получены приближенные расчетные формулы, пригодные для грубой предварительной оценки. Такой оценкой может быть, например, среднее арифметическое величин t_1, t_2 . Могут быть получены также простые формулы путем аппроксимации.

Кроме того, аналитический вид решения необходим при проведении качественного анализа температурных полей в грунтах методами современной теории устойчивости. Попытка провести такое исследование была сделана в работе [10].

Таким образом, полученное решение не призвано конкурировать с широко применяемыми в настоящее время универсальными численными методами. Оно имеет свою особую сферу приложения.

14SAVN520
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Москва: Изд-во МГУ, Наука, 2004. – 798 с.
2. Аксенов Б.Г. Границы решений некоторых нелинейных немонотонных задач для уравнений типа теплопроводности. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1993, т.33, №6, с. 884–895.
3. Даниэлян Ю.С. Построение оценок решений некоторых немонотонных задач нелинейного теплообмена / Ю.С. Даниэлян, Б.Г. Аксенов // Изв. АН СССР. ТВТ, 1985. – Т. 23, № 5.
4. Сигунов Ю.А. Методы решения классической задачи Стефана. / Ю.А. Сигунов – Сургут: РИО Сургутского государственного университета, 2009, – 140 с.
5. Аксенов Б.Г. Численное моделирование одномерных многофронтовых задач Стефана / Б.Г. Аксенов, Ю.Е. Карякин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2017. Том 3. № 3. С. 8–16.
6. Степанов О.А. Вторичное морозное пучение вокруг холодных труб (математическая модель) / О.А. Степанов, Б.Г. Аксенов, В.В. Фомина // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2018. № 2. С. 87–93.
7. Аксенов Б.Г. Решение задач тепло- и массопереноса с нелинейными коэффициентами / Б.Г. Аксенов, Ю.Е. Карякин, С.В. Карякина // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2019. Том 5. № 4. С. 10–20.
8. Aksenov B.G. A Multifront Problem of Freezing-Thawing Moist Soil / B.G. Aksenov Y.E. Karyakin, S.V. Karyakina // International Journal of Civil Engineering and Technologies. IOP Publishing. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 463 (2018) 022024 DOI:10.1088/1757-899X/463/2/022024/.
9. Медведский Р.И. Приближенный метод приведения решений осесимметричных задач фильтрации к плоским / Р.И. Медведский, Б.Г. Аксенов – Известия АН СССР, Механика жидкости и газа – Москва: АН СССР, №2, 1988 г., с. 185–189.
10. Аксенов Б.Г. Закономерности образования в полях температуры и влажности обособленных областей сферической формы при промерзании и протаивании грунтов // НТС. Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. – Москва: ВНИИОЭНГ, 1992 №6, с. 7–11.

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Fomina Valentina Victorovna
Industrial university of Tyumen, Tyumen, Russia
E-mail: fominavv@tyuiu.ru

Aksenov Boris Cavrilovich
Industrial university of Tyumen, Tyumen, Russia
E-mail: aksenovbg@tyuiu

Stepanov Oleg Andreevich
Industrial university of Tyumen, Tyumen, Russia
E-mail: stepanovoa@tyuiu.ru

Mironov Victor Vladimirovich
Industrial university of Tyumen, Tyumen, Russia
E-mail: mironovvv@tyuiu.ru

Abrosimova Svetlana Aleksandrovna
Industrial university of Tyumen, Tyumen, Russia
E-mail: abrosimovasa@tyuiu.ru

Solving problems of soil freezing-thawing for heat and gas supply systems

Abstract. The laying of utilities in northern conditions is complicated by the phenomena of freezing-thawing of soil around the pipeline and from the day surface. Moisture phase transition processes in soils are usually investigated using the Stefan problem, in which two boundary-value heat conduction problems for a thawed and frozen zone are solved taking into account the additional Stefan condition at the phase transition front. If this problem is reduced to a single heat conduction equation, then the Dirac delta function arises in one of the coefficients. This reflects the fact that at the phase transition temperature, the effective heat capacity of water is formally equal to infinity. But in finely dispersed soils, the phase transition occurs in a certain temperature range, so a transition to a single equation is possible. For coarsely dispersed soils some delta-like function may be used instead of the delta function providing that the integral heat of the phase transition remains exactly the same. This is a standard method in numerical technique. By means of it, the phase transition front is formally eliminated from the mathematical problem and we have only one continuous nonlinear heat conduction equation. In this paper, we propose a method for the approximate solution of the problem of freezing-thawing of finely dispersed moist soil for an infinite axisymmetric one-dimensional domain. For the exact solution sought, we find upper and lower bounds. In order to obtain more precise bounds we get the integral representation of the initial differential equation by means of the Green`s function. Then these bounds are refined. This continues until a solution is obtained with any given accuracy. The maximum value of the absolute error at each iteration is equal to the difference between the upper and lower bounds. The method is recommended for use directly for technical calculations, as well as for assessing the accuracy of approximate and numerical methods as a reference.

Keywords: freezing-thawing; moist soil; phase transition front; Stefan problem; axisymmetric domain; bounds for the solution