

Вестник Евразийской науки / The Eurasian Scientific Journal <https://esj.today>

2019, №4, Том 11 / 2019, No 4, Vol 11 <https://esj.today/issue-4-2019.html>

URL статьи: <https://esj.today/PDF/20ITVN419.pdf>

**Ссылка для цитирования этой статьи:**

Петрова Л.С., Шаврук О.К. Численное решение задачи о расчете пространственного распределения потенциала электрического поля в поперечном сечении связанных микрополосковых линий // Вестник Евразийской науки, 2019 №4, <https://esj.today/PDF/20ITVN419.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

**For citation:**

Petrova L.S., Shavruk O.K. (2019). Numerical solution of the problem of calculating the dimensional distribution of the potential of the electric field in the cross section connected microstrip lines. *The Eurasian Scientific Journal*, [online] 4(11). Available at: <https://esj.today/PDF/20ITVN419.pdf> (in Russian)

УДК 519.632:621.372

ГРНТИ 50.05.03; 45.03.05; 27.35.33; 27.31.44

**Петрова Лилия Сергеевна**

ФГБОУ ВО «Омский государственный университет путей сообщения», Омск, Россия

Доцент кафедры «Высшая математика»

Кандидат педагогических наук

Доцент по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

E-mail: [petrov.306@mail.ru](mailto:petrov.306@mail.ru)

РИНЦ: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=687889](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=687889)

**Шаврук Олеся Константиновна**

ФГБОУ ВО «Омский государственный университет путей сообщения», Омск, Россия

Институт электрического транспорта и систем энергообеспечения

Студент

E-mail: [shavrukolesya@mail.ru](mailto:shavrukolesya@mail.ru)

**Численное решение задачи о расчете  
пространственного распределения потенциала  
электрического поля в поперечном сечении  
связанных микрополосковых линий**

**Аннотация.** Статья посвящена численным методам решения задачи о расчете пространственного распределения потенциала электрического поля в поперечном сечении открытой многопроводной связанной микрополосковой линии передачи на слоистой подложке.

Рассмотрена реализация метода сеток с использованием трехслойной неявной разностной схемы при решении уравнения Лапласа в двумерной области с трехслойным заполнением на равномерной и неравномерной сетках.

Получено численное решение задачи о расчете потенциала электрического поля при многослойном заполнении трехпроводной связанной микрополосковой линии с использованием метода последовательной верхней релаксации.

Представлены результаты расчетов пространственного распределения потенциала электрического поля в несимметричной трехпроводной связанной микрополосковой линии, реализуемой на двухслойной диэлектрической подложке.

Полученные результаты могут использоваться для расчета волновых параметров при электростатическом моделировании открытой многопроводной связанной микрополосковой линии на многослойной диэлектрической подложке.

**Ключевые слова:** численные методы; потенциал электрического поля; микрополосковые линии; неявная разностная схема; метод последовательной верхней релаксации; конечно-разностные уравнения

### Введение

Разработка современной электронной аппаратуры на основе интегральных устройств требует существенного улучшения её функциональных характеристик с учетом уменьшения габаритов. В настоящее время при разработке новых конструкций с улучшенными параметрами (надежность, миниатюрность, технологичность и др.) достаточно актуально использование устройств на основе полосковых и микрополосковых линий.

Основными достоинствами микрополосковых линий наряду с высокой надежностью, хорошей воспроизводимостью параметров и малостью массогабаритных параметров является возможность автоматизации производства с применением технологий изготовления печатных плат, гибридных и плёночных интегральных микросхем, использование для производства микроволновых устройств [1–3].

Современными исследователями [2; 4–6] отмечается достаточно широкое применение микрополосковых конструкций в СВЧ технике, рассматривается преимущество использования полосковых фильтров на основе системы взаимодействующих резонаторов, представляющих собой отрезок микрополосковой линии.

Микрополосковая линия является несимметричной полосковой линией передачи, выполненной на подложке с высокой диэлектрической проницаемостью, содержащей с внешней стороны металлический экранированный слой [6, с. 12].

Область концентрации электрического поля для линий передачи СВЧ достаточно часто имеет слои материалов с различными диэлектрическими проницаемостями за счет нанесения на поверхность линий передачи технологических материалов, имеющих различные диэлектрические характеристики, образующих кусочно-однородную среду. Отсутствие симметрии в плоскости поперечного сечения и распространение вдоль проводника квази- $T$  волны приводит к усложнению математического описания при проектировании устройств на основе микрополосковых линий.

Близко размещенные друг к другу микрополосковые (полосковые) линии взаимодействуют по полю и образуют многопроводные связанные микрополосковые (полосковые) линии передачи. Связанные микрополосковые линии используются при проектировании фильтров, направленных ответвителей, элементов согласования комплексных сопротивлений, линий задержки [5; 7; 8].

Решение задачи о расчете электрического поля многопроводной связанной микрополосковой линии передачи в области с неоднородным диэлектрическим заполнением является сложной математической задачей.

### Анализ проблемы

Инженерные методы проектирования устройств, конструируемых с использованием многопроводных связанных микрополосковых линий, основываются на моделировании

волновых процессов в квазистатическом приближении и на квазидинамическом моделировании. При этом строгий электродинамический анализ полей в микрополосковой линии производится только для наиболее простых случаев (однородная среда, простейшая форма электродов и т. д.). В работе Л.М. Карпукова, Р.Д. Пулова, В.О. Рыбина [1, с. 31–32] на основании представленной методики квазидинамического моделирования представлен расчет характеристик трехпроводной связанной микрополосковой линии на однослойной диэлектрической подложке.

Сложная конструкция устройств на основе многопроводных связанных микрополосковых линий ограничивает эффективность применения электродинамических методов моделирования вследствие значительных вычислительных затрат и способствует использованию квазистатического подхода, т. к. на практике электрическое поле в поперечном сечении линии распределено аналогично электростатическому полю в плоском конденсаторе.

Аналитические методы математического моделирования электростатического поля, основанные на строгом решении уравнений Лапласа или Пуассона, ограничены в применении за счет неоднородности по сечению параметров заполняющей среды в микрополосковой линии на многослойной диэлектрической подложке. В работе В.В. Тюрнева [9] получены формулы для расчета параметров распространения электромагнитных волн СВЧ в многопроводной микрополосковой линии передачи на слоистой подложке, содержащей ферромагнитную пленку в результате точного решения двумерных граничных задач магнито- и электростатики с использованием преобразования Фурье. При расчете в однородной диэлектрической среде широкое применение имеет метод конформных отображений.

В рамках анализа микрополосковой линии передачи в кусочно-однородной среде исследователями рассматриваются комплексные аналитико-численные методы. В исследовании А.Ю. Попкова [2] разработана модель направленного ответвителя, основанная на методах конечных разностей и декомпозиции, учитывающая неоднородности полосковых линий. С.М. Стручковым и А.Н. Сычевым [7] предложена методика на базе комбинированных конформных отображений с использованием интеграла Кристоффеля-Шварца и численного определения неизвестных параметров.

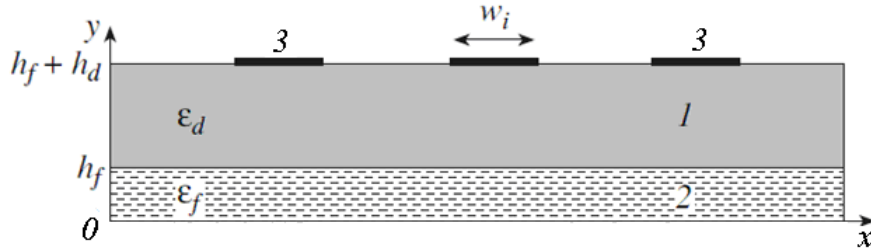
Необходимо отметить, что использование аналитических методов при моделировании микрополосковой линии на многослойной диэлектрической подложке приводит к резкому возрастанию трудоемкости выполнения преобразований, в этом случае, как правило, оптимально применение численных методов. В работе А.М. Смирнова [3] описано математическое моделирование на основе метода конечных элементов с использованием программного комплекса ELCUT. Реализация метода сеток (метода конечных разностей) с использованием пакета MathCAD представлена в работе [10] при этом описание применения данного метода ограничивается решением электростатической задачи в симметричной полосковой линии передачи с одним проводником и двумя слоями диэлектрика.

Для расчета волновых параметров при электростатическом моделировании многопроводной связанной микрополосковой линии на многослойной диэлектрической подложке достаточно актуально использование численных методов (в частности, метода сеток).

### Методы решения

Рассмотрим задачу о расчете потенциала электрического поля при многослойном заполнении трехпроводной связанной микрополосковой линии. Поперечное сечение рассматриваемой трехпроводной микрополосковой линии передач представлено на рисунке 1.

Конструкция линии включает три металлических проводника шириной  $w_i$ , толщина предполагается нулевой, подложка имеет два диэлектрических слоя толщиной  $h_d$  и  $h_f$ , каждый из которых характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_d$  и  $\varepsilon_f$  соответственно. Внешняя сторона подложки покрыта слоем металла (экранирована).



**Рисунок 1.** Поперечное сечение микрополосковой линии передачи:  
1 – первый слой диэлектрика, 2 – второй слой диэлектрика, 3 – полосковые проводники (разработано автором)

Внутри каждого диэлектрического слоя при условии отсутствия зарядов вне проводников линии передачи распределение потенциала описывается уравнением Лапласа в двумерной области, имеющим в декартовых координатах следующий вид [10, с. 12]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Для построения конечно-разностной схемы в приведенное выше двумерное уравнение Лапласа подставляются аппроксимации вторых производных с учетом равномерности сетки [10, с. 17, 19] и получают конечно-разностное уравнение вида:

$$\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} - 4\varphi_{i,j} = 0 \quad (2)$$

В случае, когда шаг сетки по координате  $x$  равен  $h_x$  и отличается от шага по  $y$  равному  $h_y$ , разностное уравнение представимо в виде:

$$\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} + \alpha^2 \varphi_{i,j-1} + \alpha^2 \varphi_{i,j+1} - 2(1 + \alpha^2) \varphi_{i,j} = 0 \quad (3)$$

где  $\alpha = \frac{h_x}{h_y}$ .

Для точек, лежащих на границах раздела диэлектрических слоев, при получении уравнения связи узловых потенциалов, используют соотношение  $\int_L \varepsilon_r (\nabla \varphi) \vec{n} d\vec{l} = 0$ , где  $L$  – замкнутый контур, состоящий из отрезков прямых линий, параллельных координатным осям,  $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали к контуру интегрирования. Суммируя результаты интегрирования по каждому из четырех отрезков, получают сеточное уравнение для граничных узловых точек:

$$\varepsilon_{df} \varphi_{i-1,j} + \varepsilon_{df} \varphi_{i+1,j} + \varepsilon_f \varphi_{i,j-1} + \varepsilon_d \varphi_{i,j+1} - 4\varepsilon_{df} \varphi_{i,j} = 0 \quad (4)$$

где  $\varepsilon_{df} = \frac{\varepsilon_f + \varepsilon_d}{2}$ .

Аналогично, для случая, если шаг сетки по координате  $x$  отличается от шага по  $y$ :

$$\varepsilon_{df}\varphi_{i-1,j} + \varepsilon_{df}\varphi_{i+1,j} + \varepsilon_f\alpha^2\varphi_{i,j-1} + \varepsilon_d\alpha^2\varphi_{i,j+1} - 2\varepsilon_{df}(1+\alpha^2)\varphi_{i,j} = 0. \quad (5)$$

Используя аппроксимации частных производных для неравномерной сетки с разложением потенциала  $\varphi_{j+1}$  в ряд Тейлора по координате  $y$  с шагом  $H_y$  и с представлением потенциала  $\varphi_{j-1}$  в ряд Тейлора по координате  $y$  с шагом  $h_y$  [10, с. 21–22], получают сеточное уравнение Лапласа для точек, принадлежащим границам раздела диэлектрических слоев, на неравномерной сетке:

$$\frac{\varepsilon_f h_y + \varepsilon_d H_y}{2h_x}(\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j}) + \frac{\varepsilon_f h_x}{h_y}\varphi_{i,j-1} + \frac{\varepsilon_d h_x}{H_y}\varphi_{i,j+1} - \left[ \varepsilon_f \left( \frac{h_x}{h_y} + \frac{h_y}{h_x} \right) + \varepsilon_d \left( \frac{h_x}{H_y} + \frac{H_y}{h_x} \right) \right] \varphi_{i,j} = 0. \quad (6)$$

При реализации метода последовательной релаксации для ускорения сходимости вносятся соответствующие корректировки в итерационные формулы для точек, принадлежащих границам раздела слоев диэлектриков, и для внутренних точек. На основе формулы (3), вводя параметр релаксации  $\omega$  и номер итерации верхним индексом, получают итерационную формулу для вычисления значений сеточной функции во внутренних узлах сетки при условии отличия координатных шагов по  $x$  и  $y$  [10, с. 33]:

$$\varphi_{i,j}^{p+1} = (1-\omega)\varphi_{i,j}^p + \frac{\omega}{2(1+\alpha^2)}(\varphi_{i-1,j}^{p+1} + \varphi_{i+1,j}^p + \alpha^2\varphi_{i,j-1}^{p+1} + \alpha^2\varphi_{i,j+1}^p). \quad (7)$$

Определение потенциала в узловых точках, лежащих на границах диэлектрических слоев, для равномерной сетки ( $h_x \neq h_y$ ,  $h_y = H_y$ ) производится по формуле:

$$\varphi_{i,j}^{p+1} = (1-\omega)\varphi_{i,j}^p + \frac{\omega}{2\varepsilon_{df}(1+\alpha^2)}(\varepsilon_{df}\varphi_{i-1,j}^{p+1} + \varepsilon_{df}\varphi_{i+1,j}^p + \varepsilon_f\alpha^2\varphi_{i,j-1}^{p+1} + \varepsilon_d\alpha^2\varphi_{i,j+1}^p). \quad (8)$$

Аналогичным образом на основе формулы (6) нами получена расчетная формула для определения потенциала узловых точек, принадлежащих границе раздела диэлектриков в случае неравномерной сетки:

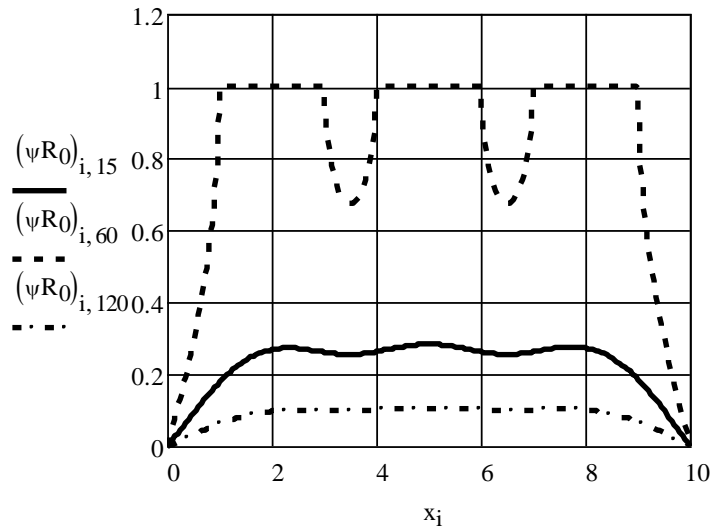
$$\varphi_{i,j}^{p+1} = (1-\omega)\varphi_{i,j}^p + \frac{\omega}{2\varepsilon_f\beta(\alpha^2+1) + 2\varepsilon_d\alpha(\beta^2+1)} \left[ (\beta\varepsilon_f + \alpha\varepsilon_d)(\varphi_{i-1,j}^{p+1} + \varphi_{i+1,j}^p) + 2\alpha\beta(\alpha\varepsilon_f\varphi_{i,j-1}^{p+1} + \beta\varepsilon_d\varphi_{i,j+1}^p) \right]. \quad (9)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{h_x}{h_y}, \quad \beta = \frac{h_x}{H_y}.$$

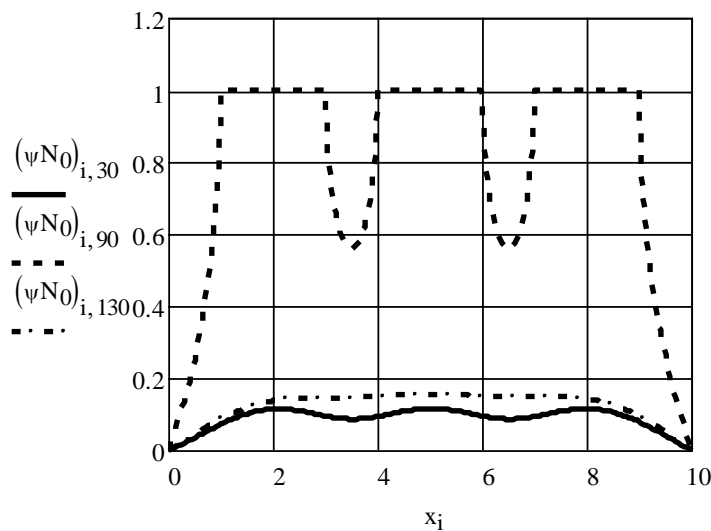
Применение формул (7), (8) и (9) при  $1 < \omega < 2$  позволяет реализовывать метод последовательной верхней релаксации, обладающий достаточно быстрой сходимостью.

Программа для численного расчета потенциала электрического поля при многослойном заполнении трехпроводной связанной микрополосковой линии реализовывалась в системе MathCAD и в среде программирования Dev-C++. Для сравнения результатов расчетов пространственного распределения потенциала при реализации метода верхней релаксации на основе методики конечных разностей с применением формул (7), (8) при равномерной сетке и формул (7), (9) при неравномерной сетке использовались следующие параметры: ширина металлических проводников  $w_i = 2$  мм, величина зазоров между полосками  $s_i = 1$  мм, толщина диэлектрических слоев  $h_d = 1,5$  мм и  $h_f = 0,5$  мм, относительная диэлектрическая проницаемость воздуха  $\varepsilon = 1$  и слоев подложки  $\varepsilon_d = 9,6$  и  $\varepsilon_f = 2,3$ , поперечное сечение расчетной области  $a = b = 10$  мм.

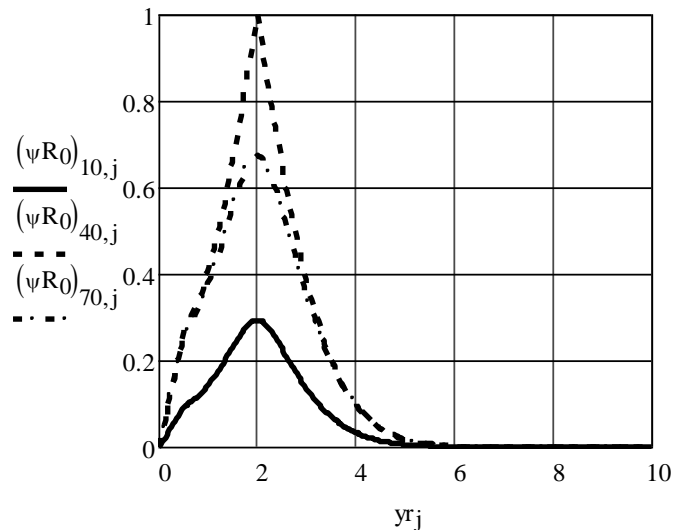
Результаты расчетов пространственного распределения безразмерного потенциала ( $\psi = \frac{\varphi}{\varphi_{\max}}$ ) при использовании равномерной ( $\psi R$ ) и неравномерной ( $\psi N$ ) сеток приведены на рисунках 2–5. Графики распределения потенциала на границе раздела диэлектрических слоев ( $y = 0,5$  мм), на верхней границе первого диэлектрика ( $y = 2$  мм) и при  $y = 4$  мм для равномерной сетки представлены на рисунке 2, для неравномерной сетки на аналогичных слоях приведены на рисунке 3. Графики распределения потенциала при  $x = 0,5$  мм,  $x = 2$  мм и при  $x = 3,5$  мм на равномерной и неравномерной сетках представлены на рисунках 4–5 соответственно.



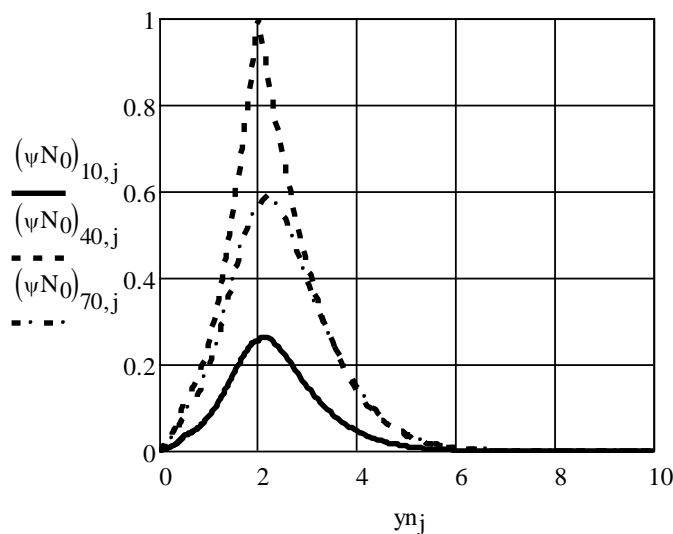
**Рисунок 2.** Распределение безразмерного потенциала при использовании равномерной сетки для  $y = 0,5$  мм,  $y = 2$  мм и  $y = 4$  мм (разработано автором)



**Рисунок 3.** Распределение безразмерного потенциала при использовании неравномерной сетки для  $y = 0,5$  мм,  $y = 2$  мм и  $y = 4$  мм (разработано автором)



**Рисунок 4.** Распределение безразмерного потенциала при использовании равномерной сетки для  $x = 0,5$  мм,  $x = 2$  мм и  $x = 3,5$  мм (разработано автором)



**Рисунок 5.** Распределение безразмерного потенциала при использовании неравномерной сетки для  $x = 0,5$  мм,  $x = 2$  мм и  $x = 3,5$  мм (разработано автором)

Полученные результаты численного моделирования распределения потенциала электрического поля в несимметричной трехпроводной связанной микрополосковой линии, реализуемой на двухслойной диэлектрической подложке, позволяют сделать вывод о предпочтительном использовании в переходных областях неравномерной сетки.

### Заключение

Нахождение погонных емкостей линий передачи основывается на решении уравнения Лапласа для двух- или трехмерного потенциала, удовлетворяющего заданным граничным условиям. Найденное распределение потенциала позволяет определить структуру электрического поля и емкость линии.

Описанный подход и полученные результаты численного эксперимента обосновывают использование неравномерных сеток для расчета волновых параметров при

электростатическом моделировании открытой многопроводной связанной микрополосковой линии на многослойной диэлектрической подложке.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Карпуков Л.М. Квазидинамическое моделирование многопроводных связанных микрополосковых линий / Л.М. Карпуков, Р.Д. Пулов, В.О. Рыбин // Электротехника и Электроэнергетика – 2006. – № 2. – С. 28–33.
2. Попков А.Ю. Влияние электрофизических и геометрических параметров на частотные характеристики полосковых направленных ответвителей со слабой связью: дис. ... канд. техн. наук. – Томск, 2016. – 115 с.
3. Смирнов А.М. Математическая модель микрополосковой линии передачи в кусочно-однородной среде с учетом подтравов печатных проводников // Научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов МИЭМ: Тез. докл. – М.: Изд-во МИЭМ. – 2009. – С. 67–69.
4. Беляев Б.А., Ходенков С.А., Галлеев Р.Г., Шабанов В.Ф. Исследование микрополосковых конструкций широкополосных полостно-пропускающих фильтров. Доклады академии наук. – 2015. – Т. 461, № 1. – С. 27–33.
5. Дмитриенко Г.В. Проектирование полосковых устройств СВЧ: учебное пособие – Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2001. – 112 с.
6. Сержантов А.М. Резонансные полосковые структуры и частотно-селективные устройства на их основе с улучшенными характеристиками: дис. ... д-ра. техн. наук. – Красноярск, 2015. – 316 с.
7. Стручков С.М. Проблематика моделирования связанных микрополосковых линий передачи / С.М. Стручков, А.Н. Сычев // Электронные средства и системы управления: матер. докл. 12-я Междунар. науч.-практ. конф. (16–18 нояб. 2016 г.): в 2 ч. – Ч. 1. – Томск: В-Спектр. – 2016. – С. 107–109.
8. Mongia R. RF and Microwave Coupled-Line Circuits / R. Mongia, I. Bahl, P. Bhartia. – London: Artech House microwave library, 2007. – 521 p.
9. Тюрнев В.В. Расчет связанных микрополосковых линий на слоистой подложке, содержащей металлическую ферромагнитную пленку // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53, № 7. – С. 858–866.
10. Зайцев В.В. Электростатическое моделирование полосковых линий: учебное пособие / В.В. Зайцев, В.И. Занин, В.М. Трещев – Самара: Изд-во «Универс-групп», 2005. – 52 с.



**Petrova Liliya Sergeevna**

Omsk state transport university, Omsk, Russia  
E-mail: petrov.306@mail.ru

**Shavruk Olesya Konstantinovna**

Omsk state transport university, Omsk, Russia  
E-mail: shavrukolesya@mail.ru

## **Numerical solution of the problem of calculating the dimensional distribution of the potential of the electric field in the cross section connected microstrip lines**

**Abstract.** The article is devoted to numerical methods for solving the problem of calculating the dimensional distribution of the electric field potential in the cross section of an open multi-wire connected microstrip transmission line on a layered substrate.

The implementation of the grid method using a three-layer implicit difference scheme for solving the Laplace equation in a two-dimensional domain with a three-layer filling on a uniform and non-uniform grids is considered.

A numerical solution of the problem of calculating the electric field potential in the case of multilayer filling of a three-wire connected microstrip line using the method of consistent upper relaxation is obtained.

The results of calculations of the dimensional distribution of the electric field potential in an asymmetric three-wire connected microstrip line implemented on a two-layer dielectric substrate are presented.

The obtained results can be used to calculate the wave parameters for electrostatic modeling of an open multi-wire connected microstrip line on a multilayer dielectric substrate.

**Keywords:** numerical methods; electric field potential; microstrip line; implicit difference scheme; method of consistent upper relaxation; finite difference equation