

Вестник Евразийской науки / The Eurasian Scientific Journal <https://esj.today>

2021, №2, Том 13 / 2021, No 2, Vol 13 <https://esj.today/issue-2-2021.html>

URL статьи: <https://esj.today/PDF/21SAVN221.pdf>

**Ссылка для цитирования этой статьи:**

Лалин В.В., Ненашев В.С., Уtimiшева Я.Г., Дьяков С.Ф. Вариационный подход к задачам устойчивости геометрически точной нелинейной теории стержней // Вестник Евразийской науки, 2021 №2, <https://esj.today/PDF/21SAVN221.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

**For citation:**

Lalin V.V., Nenashev V.S., Utimisheva I.G., Diakov S.F. (2021). Variational approach to stability problem in geometrically exact beam theory. *The Eurasian Scientific Journal*, [online] 2(13). Available at: <https://esj.today/PDF/21SAVN221.pdf> (in Russian)

**Лалин Владимир Владимирович**

ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», Санкт-Петербург, Россия  
Профессор

Доктор технических наук, профессор

E-mail: [vlalin@yandex.ru](mailto:vlalin@yandex.ru)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3850-424X>

РИНЦ: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=536375](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=536375)

SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=56091980300>

**Ненашев Валентин Сергеевич**

ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», Санкт-Петербург, Россия  
Ассистент

E-mail: [v.s.nenashev@gmail.com](mailto:v.s.nenashev@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2060-6758>

РИНЦ: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=884530](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=884530)

SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57216908348>

**Уtimiшева Яна Геннадьевна**

ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», Санкт-Петербург, Россия  
Магистрант

E-mail: [yanautimisheva@gmail.com](mailto:yanautimisheva@gmail.com)

РИНЦ: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=997485](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=997485)

SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57216910554>

**Дьяков Станислав Федорович**

ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», Санкт-Петербург, Россия  
Старший преподаватель

Кандидат технических наук

E-mail: [dyakov\\_sf@spbstu.ru](mailto:dyakov_sf@spbstu.ru)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3703-0222>

РИНЦ: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=636376](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=636376)

SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57210792974>

## Вариационный подход к задачам устойчивости геометрически точной нелинейной теории стержней

**Аннотация.** В статье рассматриваются задачи устойчивости стержней, нагруженных потенциальной нагрузкой. Подобные задачи ранее решались с применением приближенных подходов, которые либо учитывают упрощенные модели стержней, либо не учитывают докритическую деформацию стержня (линеаризованные постановки). В данной статье приводятся точные решения задач устойчивости, основанные на подходе классического

вариационного исчисления. Точные уравнения устойчивости получены, как уравнения Эйлера для второй вариации функционала Лагранжа исходной нелинейной статической задачи. Для решения задач устойчивости применяется нелинейная геометрически точная теория стержней и точное нелинейное решение задачи статики. В настоящей работе считается, что материал стержня является линейно-упругим, то есть подчиняется закону Гука. Рассмотрены две задачи об устойчивости консоли в пространственной постановке: задача устойчивости консольного стержня, нагруженного сжимающей силой, а также плоской формы равновесия консоли, нагруженной крутящим моментом. Для обеих задач были получены значения критических нагрузок. Первая задача распалась на две, и было получено два значения критической силы, каждое из которых совпало по форме с ранее полученным Д.А. Кузнецовой и В.В. Лалиным значением для критической силы в плоской постановке. Истинным значением критической силы является наименьшее из двух. Вторая задача распалась на две в зависимости от соотношения жесткостей стержня. Был рассмотрен случай, когда обе изгибные жесткости больше крутильной, что соответствует всем сортаментным профилям стержней. Для этого случая было получено конечное значение критического момента. Для обеих задач было проведено сравнение результатов полученных формул с ранее известными.

**Ключевые слова:** устойчивость; геометрически точная теория стержней; критическая нагрузка; парадокс Николаи; потеря плоской формы равновесия; следящий момент; функционал устойчивости

### Введение (актуальность)

В классическом вариационном исчислении разработан метод получения точных уравнений устойчивости, как уравнений Эйлера для второй вариации функционала Лагранжа исходной статической задачи [1; 2]. Для этого задача статики должна быть сформулирована в геометрически нелинейной постановке.

Традиционный подход к исследованию устойчивости элементов упругих конструкций заключается в использовании не функционала Лагранжа и его вариации, а вариационного уравнения, которое представляет собой принцип виртуальных перемещений.

В этом случае, как правило, используются приближенные подходы (например, линеаризованная или сильно линеаризованная постановка [3]), когда в уравнения устойчивости подставляется не точное решение нелинейной статической задачи, а решение линейной статической задачи [4–10]. Решая задачу устойчивости в такой постановке, можно получить только приближенные решения. Не имея точных решений, сложно оценить погрешность линеаризованных решений.

Например, с 80-х годов [11; 12] и до нашего времени [13–16] ведутся споры о том, какая модель более точна для решения задачи устойчивости центрально сжатой балки с учетом жесткости на сдвиг: модель, предложенная Ф. Энгессером [17] или модель, предложенная Й.А. Хэрингсом [18].

В нелинейной теории стержней с 1927 г. известен так называемый «парадокс Николаи» [19]. Он заключается в том, что консольный стержень, нагруженный крутящим моментом, теряет устойчивость при любом значении момента. Этот парадокс послужил началом развития теории устойчивости систем с непотенциальной нагрузкой [3; 20; 21]. До настоящего времени общепринятого решения «парадокс Николаи» не имеет [21–24].

В данной статье для нелинейной геометрически точной теории стержней с использованием вариационного подхода и точных аналитических решений нелинейной статической задачи исследуется проблема устойчивости консоли, нагруженной центральной

сжимающей силой, а также – устойчивости плоской формы равновесия консоли, нагруженной крутящим моментом.

## 1. Методы

В настоящей работе используется геометрически точная нелинейная теория упругих стержней [25–31]. В этой теории каждая точка стержня имеет в пространственной задаче шесть степеней свободы – три перемещения и три поворота. Повороты являются независимыми переменными. На величины перемещений, поворотов, деформаций стержня не накладывается никаких ограничений. Частными случаями этой теории являются известные теории стержней Бернулли-Эйлера и Тимошенко.

Также в настоящей работе считается, что материал стержня является линейно-упругим, то есть подчиняется закону Гука.

Геометрические нелинейные уравнения статики для геометрически точной теории:

$$\begin{cases} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})' = 0 \\ (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M})' + \mathbf{r}' \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) = 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \boldsymbol{\varphi}' \\ \mathbf{Q} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0') \end{cases}$$

где  $\mathbf{P}$  – тензор поворота;  $\mathbf{Q} = N\mathbf{e}_1 + Q_y\mathbf{e}_2 + Q_z\mathbf{e}_3$  – вектор сил;  $N$  – продольное усилие;  $Q_y$  и  $Q_z$  – перерезывающие усилия вдоль осей  $y$  и  $z$  соответственно;  $\mathbf{M} = M_t\mathbf{e}_1 + M_y\mathbf{e}_2 + M_z\mathbf{e}_3$  – вектор моментов;  $M_t$  – крутящий момент;  $M_y$  и  $M_z$  – изгибающие моменты вокруг осей  $y$  и  $z$  соответственно;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки стержня в актуальной конфигурации;  $\mathbf{Z}$  – тензор Жилина;  $\mathbf{A} = EA\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + k_yGA\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + k_zGA\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$ ;  $\mathbf{C} = GI\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + EI_y\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + EI_z\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$  – тензоры упругости в законе Гука для сил и моментов соответственно;  $\boldsymbol{\varphi}$  – вектор поворота;  $\Phi$  – модуль вектора поворота;  $\mathbf{r}_0$  – радиус-вектор точки стержня в отсчетной конфигурации;  $(\dots)' = \frac{d}{ds}(\dots)$ ,  $s$  – координата точек стержня в отсчетной конфигурации; векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  – единичные базисные векторы системы координат  $x, y, z$ .

Тензоры  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Z}$  имеют вид [26–29]:

$$\mathbf{P} = \cos \Phi \mathbf{I} + \frac{\sin \Phi}{\Phi} \mathbf{I} \times \boldsymbol{\varphi} + \frac{1 - \cos \Phi}{\Phi^2} \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi};$$

$$\mathbf{Z} = \frac{\sin \Phi}{\Phi} \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \Phi}{\Phi^2} \mathbf{I} \times \boldsymbol{\varphi} + \frac{\Phi - \sin \Phi}{\Phi^3} \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}.$$

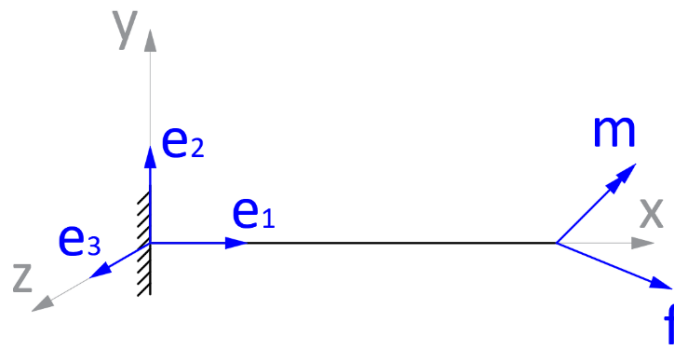
где  $\mathbf{I}$  – единичный тензор.

Далее используются следующие обозначение жесткостей:  $k_1 = EA$  – продольная жесткость;  $k_{2y} = k_yGA$  – жесткость на сдвиг относительно оси  $y$ ;  $k_{2z} = k_zGA$  – жесткость на сдвиг относительно оси  $z$ ;  $k_t = GI$  – крутильная жесткость;  $k_{3y} = EI_y$  – жесткость на изгиб относительно оси  $y$ ;  $k_{3z} = EI_z$  – жесткость на изгиб относительно оси  $z$ .

Главные и естественные граничные условия задачи статики для случая консоли с силой и моментом, приложенными на конце:

$$\begin{aligned} \underline{s = 0}: & \quad \mathbf{r} = 0; \quad \boldsymbol{\varphi} = 0; \\ \underline{s = L}: & \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{f}; \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{m}. \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mathbf{f} = \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}}$ ;  $\mathbf{m} = \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \cdot \mathbf{Z}^{-1}$  – векторы потенциальной нагрузки;  $U_1(\mathbf{r}), U_2(\varphi)$  – соответствующие потенциалы;  $L$  – длина стержня (рис. 1).



**Рисунок 1.** Консольный стержень с силой и моментом, приложенными на конце (составлено авторами)

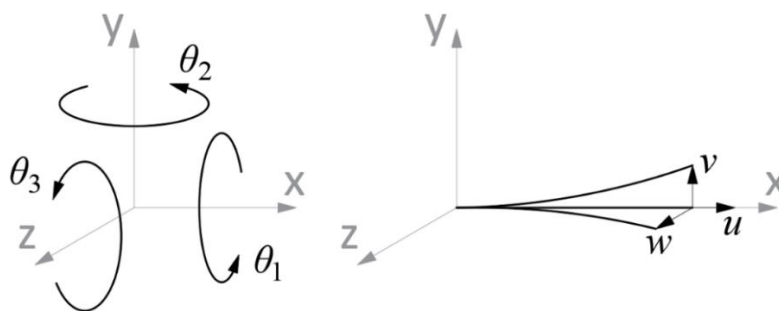
С помощью использования вариационного подхода к задачам устойчивости были получены точные уравнения устойчивости для упругих стержней:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{u}' + \mathbf{r}' \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})) - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})]' = 0; \\ & [\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})' - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}) \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})]' + \mathbf{u}' \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) + \\ & + \mathbf{r}' \times [\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{u}' + \mathbf{r}' \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})) - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\theta}$  – неизвестные функции задачи устойчивости (рис. 2).

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3$$

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_1\mathbf{e}_1 + \theta_2\mathbf{e}_2 + \theta_3\mathbf{e}_3$$



**Рисунок 2.** Неизвестные функции в задачах устойчивости (составлено авторами)

Главные и естественные граничные условия задачи устойчивости для случая консоли с силами и моментами, приложенными на конце:

$$\underline{s = 0}: \quad \mathbf{u} = 0; \boldsymbol{\theta} = 0; \quad (4)$$

$$\underline{s = L}: \quad \begin{aligned} & [\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{u}' + \mathbf{r}' \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})) - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})]' = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \mathbf{r}^2} \cdot \mathbf{u}; \\ & [\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})' - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}) \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta})] \cdot \mathbf{Z} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} \cdot \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (3) записаны в общем виде и пригодны для любой задачи устойчивости стержней. Если в уравнения (3) подставить точное решение исходной нелинейной задачи статики (1), (2), то будут получены точные уравнения задачи устойчивости для этой задачи.

Условие существования ненулевого решения задачи устойчивости (3)–(5) даёт точное значение критической нагрузки.

В зависимости от того какое решение статики применяется, можно выделить три постановки задачи устойчивости [3]:

- Точная постановка. При такой постановке в уравнения устойчивости подставляют точное решение нелинейной задачи статики.
- Линеаризованная постановка. В данной постановке в уравнения устойчивости подставляют точное решение линейной задачи статики.
- Сильно линеаризованная постановка. При такой постановке в уравнения устойчивости подставляют статически допустимое решение (при нулевых перемещениях и деформациях).

В данной работе рассмотрены исключительно точные постановки.

## 2. Результаты

### 2.1 Точное решение пространственной задачи устойчивости консольного стержня при центральном сжатии

В данном пункте получено решение задачи устойчивости центрально-сжатой консоли под действием продольной силы  $T$  в пространственной постановке (рис. 3).



*Рисунок 3. Расчетная схема консольного центрально сжатого стержня (составлено авторами)*

В данной задаче рассматривается «мёртвая» сила  $T$  с потенциалом  $U_1(\mathbf{r}) = -T\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r}$ , потенциал  $U_2 = 0$ ,  $\frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}} = -T\mathbf{e}_1$ ,  $\frac{\partial^2 U_1}{\partial \mathbf{r}^2} = 0$ .

Решение нелинейной задачи статики (1)–(2) представляет собой:

$$\mathbf{r} = \left(1 - \frac{T}{k_1}\right) s\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}; \quad (6)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Z} = \mathbf{I}, \mathbf{Q} = -T\mathbf{e}_1, \mathbf{M} = \mathbf{0}.$$

Подставим в первую группу уравнений устойчивости (3) точное решение задачи статики (6):

$$\left[ \mathbf{A} \cdot \left( \mathbf{u}' + \left(1 - \frac{T}{k_1}\right) \mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\theta} \right) + T\mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\theta} \right]' = 0.$$

Проинтегрируем, упростим и одновременно учтём первую группу естественных граничных условий задачи устойчивости (5):

$$\mathbf{u}' + \left[ \left(1 - \frac{T}{k_1}\right) \mathbf{I} + T\mathbf{A}^{-1} \right] \cdot (\mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\theta}) = 0.$$

или в координатном виде:

$$\begin{cases} u' = 0 \\ v' - \mu_3 \theta_3 = 0, \\ w' + \mu_2 \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

где  $\mu_3 = 1 - \frac{T}{k_1} + \frac{T}{k_{2y}}$ ;  $\mu_2 = 1 - \frac{T}{k_1} + \frac{T}{k_{2z}}$ .

Из первого уравнения системы (7) с учетом главного граничного условия задачи устойчивости (4) получаем решение  $u(s) = 0$ . Таким образом, в системе (7) остаются два уравнения:

$$\begin{cases} v' - \mu_3 \theta_3 = 0 \\ w' + \mu_2 \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим вторую группу уравнений устойчивости (3). Подставим в них точное решение задачи статики:

$$C \cdot \theta'' - T u' \times e_1 = 0.$$

Откуда:

$$\theta'' - TC^{-1} \cdot (u' \times e_1) = 0$$

или в координатном виде:

$$\begin{cases} \theta_1'' = 0 \\ \theta_2'' - \frac{T}{k_{3y}} w' = 0. \\ \theta_3'' + \frac{T}{k_{3z}} v' = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Подставим во вторую группу естественных граничных условий задачи устойчивости (5) точное решение задачи статики:

$$\theta'(L) = 0. \quad (10)$$

Из первого уравнения системы (9) с учетом главного (4) и естественного граничного условия задачи устойчивости (10) получаем решение:  $\theta_1(s) = 0$ . Таким образом, в системе (9) остаются два уравнения:

$$\begin{cases} \theta_2'' - \frac{T}{k_{3y}} w' = 0 \\ \theta_3'' + \frac{T}{k_{3z}} v' = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Задача (8), (11) по входящим в неё неизвестным распадается на две:

1. систему, содержащую  $v, \theta_3$  – неизвестные задачи устойчивости, представляющие собой перемещения в плоскости ХОУ;
2. систему, содержащую  $w, \theta_2$  – неизвестные задачи устойчивости, представляющие собой перемещения в плоскости ХОZ.

Обе системы решаются аналогично и могут иметь нетривиальное решение.

Первая система, в которую входят перемещения в плоскости ХОУ, представляет собой:

$$\begin{cases} v' = \mu_3 \theta_3 \\ \theta_3'' + \frac{T}{k_{3z}} v' = 0 \end{cases}$$

Эта система сводится к одному уравнению второго порядка относительно  $\theta_3$ :

$$\theta_3'' + \frac{T\mu_3}{k_{3z}}\theta_3 = 0.$$

Решением этого уравнения будет:

$$\theta_3 = C_1 \sin \sqrt{\frac{T\mu_3}{k_{3z}}}s + C_2 \cos \sqrt{\frac{T\mu_3}{k_{3z}}}s.$$

Подставим это решение в граничное условие  $\theta_3(0) = 0$ . Тогда получим, что  $C_2 = 0$  и  $\theta_3$  тогда равно:

$$\theta_3 = C_1 \sin \sqrt{\frac{T\mu_3}{k_{3z}}}s.$$

Подставим теперь  $\theta_3$  в оставшееся граничное условие  $\theta_3'(L) = 0$ :

$$C_1 \cos \sqrt{\frac{T\mu_3}{k_{3z}}}L = 0.$$

Таким образом, условием существования ненулевого решения задачи устойчивости будет следующее уравнение:

$$\cos \sqrt{\frac{T\mu_3}{k_{3z}}}L = 0.$$

Из наименьшего положительного корня этого уравнения можно найти значение критической нагрузки для данной задачи:

$$T_{crz} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\pi^2 k_{3z}}{L^2} \left( \frac{1}{k_{2y}} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_{2y}} - \frac{1}{k_1} \right)}. \quad (12)$$

Вторая система, в которую входят перемещения в плоскости XOZ, представляет собой:

$$\begin{cases} w' = -\mu_2 \theta_2 \\ \theta_2'' - \frac{T}{k_{3y}} w' = 0 \end{cases}$$

Эта система сводится к одному уравнению второго порядка относительно  $\theta_2$ :

$$\theta_2'' + \frac{T\mu_2}{k_{3y}}\theta_2 = 0.$$

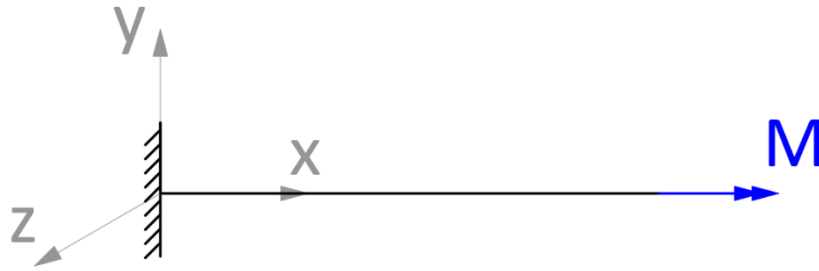
Это уравнение решается аналогично. И окончательно мы получаем второе значение для критической силы:

$$T_{cry} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\pi^2 k_{3y}}{L^2} \left( \frac{1}{k_{2z}} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_{2z}} - \frac{1}{k_1} \right)}. \quad (13)$$

В качестве расчётного значения критической силы необходимо принимать то из  $T_{cry}$  и  $T_{crz}$ , которое является наименьшим.

## 2.2 Точное решение задачи устойчивости консольного стержня при кручении

В данном пункте приводится решение пространственной задачи устойчивости для консольного стержня, нагруженного концевым крутящим моментом (рис. 4).



**Рисунок 4.** Расчетная схема консольного стержня, нагруженного крутящим моментом (составлено авторами)

В данной задаче рассматривается внешний момент, предложенный П.А. Жилиным [29]. Момент равен  $m = \frac{M}{\Phi} \varphi$ ,  $M$  – модуль вектора внешнего момента. Этот момент является потенциальным следящим моментом с потенциалом равным  $U_2(\varphi) = M\Phi$ , потенциал  $U_1 = 0$ ,  $\frac{\partial U_2}{\partial \varphi} = \frac{M}{\Phi} \varphi$ ,  $\frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} = \frac{M}{\Phi} \left(1 - \frac{\varphi\varphi}{\Phi^2}\right)$ .

Для данной задачи точное решение геометрически нелинейной задачи статики имеет вид:

$$\mathbf{r} = s\mathbf{e}_1; \mathbf{r}' = \mathbf{e}_1; \boldsymbol{\varphi} = \frac{Ms}{k_t} \mathbf{e}_1; \Phi = \frac{Ms}{k_t}; \mathbf{Q} = \mathbf{0}; \mathbf{M} = M\mathbf{e}_1. \quad (14)$$

Тензоры  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Z}$  в данной задаче имеют вид:

$$\mathbf{P} = \cos \frac{Ms}{k_t} \mathbf{I} + \sin \frac{Ms}{k_t} \mathbf{I} \times \mathbf{e}_1 + \left(1 - \cos \frac{Ms}{k_t}\right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1;$$

$$\mathbf{Z} = \frac{k_t}{Ms} \left[ \sin \frac{Ms}{k_t} \mathbf{I} + \left(1 - \cos \frac{Ms}{k_t}\right) \mathbf{I} \times \mathbf{e}_1 + \left(\frac{Ms}{k_t} - \sin \frac{Ms}{k_t}\right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \right].$$

Подставим в первую группу уравнений устойчивости (3) точное решение задачи статики (14):

$$[\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{u}' + \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta}))]' = 0.$$

Проведем замену  $\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\psi}$  и получим:

$$[\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{u}' + \mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\psi})]' = 0.$$

Проинтегрируем, упростим и учтём первую группу естественных граничных условий задачи устойчивости (5):

$$\mathbf{u}' + \mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$$

или в координатном виде:

$$\begin{cases} u' = 0 \\ v' - \psi_3 = 0 \\ w' + \psi_2 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Из первого уравнения системы (15) с учетом главного граничного условия задачи устойчивости (4) получаем решение:  $u(s) = 0$ . Таким образом, первая группа уравнений окончательно принимает следующий вид:

$$\begin{cases} v' - \psi_3 = 0 \\ w' + \psi_2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$



Рассмотрим вторую группу уравнений устойчивости (5). Подставим в них точное решение задачи статики с учётом проведенной замены для  $\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\theta}$ :

$$[\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\psi}' - \mathbf{M} \times \boldsymbol{\psi}]' + \mathbf{r}' \times [\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{u}' + \mathbf{r}' \times \boldsymbol{\psi})] = 0. \quad (17)$$

Подставим во вторую группу естественных граничных условий задачи устойчивости (5) точное решение задачи статики (14), с учётом проведенной замены:

$$[\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\psi}' - \mathbf{M} \times \boldsymbol{\psi}]_{s=L} = \frac{k_t}{L} (\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) \cdot \boldsymbol{\theta}(L). \quad (18)$$

Учитывая первую группу уравнений устойчивости, получим, что второе слагаемое уравнения (17)  $\mathbf{r}' \times [\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{u}' + \mathbf{r}' \times \boldsymbol{\psi})]$  равно нулю, следовательно:

$$[\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\psi}' - \mathbf{M} \times \boldsymbol{\psi}]' = 0.$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\psi}' - \mathbf{M} \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{B}.$$

где  $\mathbf{B} = B_1 \mathbf{e}_1 + B_2 \mathbf{e}_2 + B_3 \mathbf{e}_3$  – вектор констант интегрирования.

В координатном виде получим:

$$\begin{cases} \psi'_1 = B_1 \\ (k_{3y} \cos^2 \Phi + k_{3z} \sin^2 \Phi) \psi'_2 + (k_{3y} - k_{3z}) \sin \Phi \cos \Phi \psi'_3 + M \psi_3 = B_2 \\ (k_{3y} - k_{3z}) \sin \Phi \cos \Phi \psi'_2 + (k_{3y} \sin^2 \Phi + k_{3z} \cos^2 \Phi) \psi'_3 - M \psi_2 = B_3 \end{cases} \quad (19)$$

Из первого уравнения системы (19) с учетом главного (4) и естественного (18) граничного условия задачи устойчивости получаем решение:  $\psi_1(s) = 0$ . Таким образом, вторая группа уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{cases} (k_{3y} \cos^2 \Phi + k_{3z} \sin^2 \Phi) \psi'_2 + (k_{3y} - k_{3z}) \sin \Phi \cos \Phi \psi'_3 + M \psi_3 = B_2 \\ (k_{3y} - k_{3z}) \sin \Phi \cos \Phi \psi'_2 + (k_{3y} \sin^2 \Phi + k_{3z} \cos^2 \Phi) \psi'_3 - M \psi_2 = B_3 \end{cases} \quad (20)$$

Так как уравнения (20) зависят только от  $\psi_2$  и  $\psi_3$ , то для решения задачи о нахождении значения критического крутящего момента достаточно решить только их, а затем для нахождения форм потери устойчивости подставить найденные  $\psi_2$  и  $\psi_3$  в систему (16) и найти  $v$  и  $w$ .

При решении системы дифференциальных уравнений (20) задача распалась на два случая:

1.  $k_t < k_{3z}; k_t < k_{3y}$  (изгибные жесткости вокруг осей  $z$  и  $y$  больше, чем крутильная жесткость);
2.  $k_{3z} < k_t$  или  $k_{3y} < k_t$  (изгибная жесткость вокруг оси  $z$  или  $y$  меньше, чем крутильная жесткость).

Решая систему, будем рассматривать случай 1, когда изгибная жесткость вокруг осей  $z$  и  $y$  больше, чем крутильная жесткость, что соответствует случаю любого сортаментного профиля.

Решение системы дифференциальных уравнений (20) имеет вид:

$$\psi_2 = C_1 \left( \cos \mu s \cos \varphi s - \sqrt{\frac{b}{a}} \sin \mu s \sin \varphi s \right) - C_2 \left( \cos \mu s \sin \varphi s + \sqrt{\frac{a}{b}} \sin \mu s \cos \varphi s \right) - \frac{B_3}{M};$$

$$\psi_3 = C_1 \left( \cos \mu s \sin \varphi s + \sqrt{\frac{b}{a}} \sin \mu s \cos \varphi s \right) + C_2 \left( \cos \mu s \cos \varphi s - \sqrt{\frac{a}{b}} \sin \mu s \sin \varphi s \right) + \frac{B_2}{M},$$

где  $\mu = M\sqrt{ab}$ ,  $\varphi = \frac{M}{k_t}$ ,  $a = \frac{1}{k_{3y}} - \frac{1}{k_t}$ ,  $b = \frac{1}{k_{3z}} - \frac{1}{k_t}$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  – произвольные постоянные.

Подставим решение задачи устойчивости в последние два главных граничных условия (4) и выразим  $B_2$  и  $B_3$  через  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{aligned} \psi_2 &= C_1 \left( \cos \mu s \cos \varphi s - \sqrt{\frac{b}{a}} \sin \mu s \sin \varphi s - 1 \right) - C_2 \left( \cos \mu s \sin \varphi s + \sqrt{\frac{a}{b}} \sin \mu s \cos \varphi s \right); \\ \psi_3 &= C_1 \left( \cos \mu s \sin \varphi s + \sqrt{\frac{b}{a}} \sin \mu s \cos \varphi s \right) + C_2 \left( \cos \mu s \cos \varphi s - \sqrt{\frac{a}{b}} \sin \mu s \sin \varphi s - 1 \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Подставив решение задачи устойчивости (21) в последние два естественных граничных условия из (18), получим, что условием существования ненулевого решения будет равенство нулю следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} \cos \mu L \cos \varphi L - \sqrt{\frac{b}{a}} \sin \mu L \sin \varphi L - \cos \varphi L & -\cos \mu L \sin \varphi L - \sqrt{\frac{a}{b}} \sin \mu L \cos \varphi L + \sin \varphi L \\ \cos \mu L \sin \varphi L - \sqrt{\frac{b}{a}} \sin \mu L \cos \varphi L - \sin \varphi L & \cos \mu L \cos \varphi L - \sqrt{\frac{a}{b}} \sin \mu L \sin \varphi L - \cos \varphi L \end{vmatrix} = 0.$$

Равенство нулю определителя сводится к следующему уравнению:

$$\cos \mu L = 1.$$

Из наименьшего положительного корня этого уравнения можно найти значение критического момента для данной задачи:

$$M_{cr} = \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{EI_z} - \frac{1}{GI}\right)\left(\frac{1}{EI_y} - \frac{1}{GI}\right)}}. \quad (22)$$

Представленная формула является точным значением критического момента у консоли, нагруженной концевым крутящим следящим потенциальным моментом, и учитывает все жесткости стержня, участвующие в данной потере устойчивости.

### Обсуждение и выводы

Полученные в предыдущем пункте формулы для критических сил и моментов были получены, исходя из строгих результатов классического вариационного исчисления, и, следовательно, являются точными для нелинейной одномерной теории упругих стержней. Данные решения можно сравнить с результатами, которые были получены исследователями ранее для приближенных моделей стержней и по упрощенным методам. Например, с формулами для балки Бернулли-Эйлера и балки Тимошенко.

Для задачи о центральном сжатии стержня существует три известных решения [6]:

1. Формула Эйлера:  $T_{crEul} = \frac{\pi^2 EI_z}{4L^2}$ . Данная формула непосредственно следует из нашего решения (12) и (13), если принять, что  $\frac{1}{EA} \rightarrow 0$  и  $\frac{1}{k_y GA} \rightarrow 0$ .

2. Формула Энгессера:  $T_{crEng} = \frac{T_{crEul}}{\left(1 + \frac{T_{crEul}}{k_y GA}\right)}$ . Если принять, что  $\frac{1}{k_1} \rightarrow 0$ , формула полученная нами преобразуется в  $T_{crTim} = \frac{k_y GA}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4T_{crEul}}{k_y GA}} - 1 \right)$ . Эта формула является точным решением задачи устойчивости для балки Тимошенко и также приведена в [6]. Таким образом формула Энгессера не следует непосредственно из нашего решения и, соответственно, является ошибочной.
3. Формула Хэррингса, которая была выведена, исходя не из строгих математических рассуждений и только для круговых пружин. Данная формула полностью совпадает с полученной нами формулой.

Впервые формула (12) была получена и строго обоснована в работах В.В. Лалина и Д.А. Кузнецовой (Кушовой) [32] в рамках плоской постановки. Полученное в настоящей работе решение (12) и (13) также доказало, что для пространственной постановки других значений критической нагрузки в рамках данной модели стержней не имеется.

Для задачи о чистом кручении стержня известно несколько решений:

1. Формулы, приведенные в монографии Перельмутера и Сливкера [3], представляют собой решения задачи устойчивости для скрученной консоли. Однако, задача решена в сильно линеаризованной постановке и с другими типами моментов. Представленные решения имеют вид:  $M_{crPS} = \frac{K}{L} \sqrt{EI_y EI_z}$ , где  $K$  – коэффициент, зависящий от типа приложенного крутящего момента. Если принять, что  $\frac{1}{GI} \rightarrow 0$ , формула (22), полученная нами, преобразуется в  $M_{crL} = \frac{2\pi}{L} \sqrt{EI_y EI_z}$ . Как видно общая структура обеих формул совпадает. Для проверки значений конкретных коэффициентов  $K$  необходимо также решить задачу для других, рассмотренных в монографии [3], потенциальных моментов.

2. Решение Сергеева-Жилина. В статье [24] приводится решение задачи устойчивости с таким же потенциальным крутящим моментом, как и в настоящей работе, только для частного случая симметричного поперечного сечения ( $EI_y = EI_z$ ). Это решение совпадает с нашим, если принять условие симметричности:  $M_{crSym} = \frac{2\pi}{L} \frac{1}{\left| \frac{1}{EI} - \frac{1}{GI} \right|}$ .

Из формулы (22) следует, что критического момента не существует, если одна из изгибных жесткостей меньше, чем крутильная, что соответствует, например, случаю прямоугольного сечения с соотношением сторон  $\approx 1,8$ , но не соответствует ни одному сортаментному профилю.

С практической точки зрения у обеих, полученных в данной статье, формул (12), (22) есть довольно существенное ограничение, состоящее в том, что материал стержня до достижения потери устойчивости может начать переходить в состояние пластичности. Строгая математическая постановка задачи устойчивости с учетом пластических деформаций для геометрически нелинейной одномерной теории стержней авторам неизвестна.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gelfand I.M.. Calculus of Variations / I.M. Gelfand, S.V. Fomin. – Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1964. – 232 p.
2. Bruce van Brunt. The Calculus of Variations. – DOI: 10.1007/b97436. – New York: Springer-Verlag, 2004. – 292 p.
3. Perelmuter A.V. Handbook of mechanical stability in engineering (in 3 volumes): Vol. 1: General theorems and individual members of mechanical systems / A.V. Perelmuter, V. Slivker. – DOI: 10.1142/8372. – London: World Scientific Publishing Co., 2013. – 1546 p.
4. Ziegler H. Principles of structural stability. – Waltham-Massachusetts-Toronto-London: Blaisdell Publ. Comp., 1968. – 192 p.
5. Koiter W.T. On the stability of elastic equilibrium. – Washington, D.C., National Aeronautics and Space Administration, 1967. – 404 p.
6. Timoshenko S.P. Theory of elastic stability / S.P. Timoshenko, J.M. Gere. – New York: International Student Edition, 1985. – 541 p.
7. Wang C.M. Exact solutions for buckling of structural members / C.M. Wang, C.Y. Wang, J.N. Reddy. – DOI: 10.1201/9780203483534. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 224 p.
8. Trahair N.S. Flexural-torsional buckling of structures. – Boca Raton: CRC Press, 2019. – 352 p.
9. Bažant Z.P. Stability of structures: Elastic, inelastic, fracture and damage theories / Z.P. Bažant, L. Cedolin. – DOI: <https://doi.org/10.1142/7828>. – London: World Scientific Publishing Co., 2010. – 1012 p.
10. Simites G.J. Fundamentals of Structural Stability / G.J. Simites, D.H. Hodges. – DOI: 10.1016/B978-0-7506-7875-9.X5000-2. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2006. – 480 p.
11. Ziegler H. Arguments for and against Engesser's buckling formulas. – DOI: 10.1007/BF00536318. // Ingenieur-Archiv. – 1982. – № 52. – P. 115–119.
12. Reissner E. Some remarks on the problem of column buckling. – DOI: 10.1007/BF00536319 // Ingenieur-Archiv. – 1982. – № 52. – P. 105–113.
13. Aristizabal-Ochoa J.D. Stability of columns with semi-rigid connections including shear effects using Engesser, Haringx and Euler approaches. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.12.008>. // Eng. Struct. – 2011. – № 33 – P. 868–880.
14. Genovese D. Shear deformable rod theories and fundamental principles of mechanics / I. Elishakoff. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01556-7> // Archive of Applied Mechanics. – 2019. – № 89. – P. 1995–2003.
15. Blaauwendraad J. Shear in structural stability: on the Engesser-Haringx discord. – DOI: 10.1115/1.3197142 // Journal of Applied Mechanics. – 2010. – № 77 (3) – 031005 (8 pages).

16. Li X.-F. Effects of engesser's and haringx's hypotheses on buckling of timoshenko and higher-ordershear-deformable columns / X.-F. Li, K.Y. Lee. – DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001363](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001363). // Journal of Engineering Mechanics. – 2018. – № 144 (1) – 04017150 (13 pages).
17. Engesser F. Die knickfestigkeit gerader stäbe. – Berlin: W. Ernst & Sohn, 1891. – 13 p.
18. Haringx J.A. On buckling and the lateral rigidity of helical compression springs // Proc. Konjlike Ned. Akad. Wettenschappen. – 1942. – № 45. – P. 533–539.
19. Николаи Е.Л. Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня // Изв. Ленингр. политехн. ин-та. – 1928. – т. 31. – С. 1–26.
20. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – Москва: Физматгиз, 1961. – 339 с.
21. Радин В.П. Решение неконсервативных задач теории устойчивости / Ю.Н. Самогин, В.П. Чирков, А.В. Щугорев. – Москва: Физматлит, 2017. – 238 с.
22. Кривцов А.М. О парадоксе Николаи в консервативных системах / А.М. Кривцов В.А. Кузькин // Жилин П.А. Динамика твердого тела – Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2015. – С. 578–583.
23. Майлыбаев А.А. Влияние неконсервативных сил на устойчивость систем с кратными частотами и парадокс Николаи / DOI: 10.1134/S1028335810901215 // Москва: Доклады Академии наук. – 2011. – 436, № 2. – С. 188–194.
24. Сергеев А.Д. Бифуркация равновесия сжатого стержня, скрученного следящим и мертвым моментами // Тр. СПбГТУ. – 1993. – № 446. – С. 193–195.
25. Simo J.C. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 1985. – № 49. – P. 55–70.
26. Simo J.C. On the dynamics in space of rods undergoing large motions – a geometrically exact approach / J.C. Simo, L. Vu-Quoc // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 1988. – № 66. – С. 125–161.
27. Pimenta P.M. Geometrically exact analysis of spatial frames / P.M. Pimenta, T. Yojo. – DOI: 10.1115/1.3122626. // Appl. Mech. Rev. – 1993. – № 46. – P. 118–128.
28. Жилин А.П. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней – Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. – 101 с.
29. Zhilin P.A. A new approach to the analysis of free rotations of rigid bodies. – DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19960760402>. // ZAMM Zeitschrift fur Angew. Math. und Mech. – 1996. – № 76. – P. 187–204.
30. Елисеев В.В. Механика упругих тел. – Санкт-Петербург: Изд-во СПбГПУ, 2003. – 336 с.
31. Лалин В.В. Вариационные постановки нелинейных задач с независимыми вращательными степенями свободы / Е.В. Зданчук, Д.А. Кушова, Л.А. Розин. – DOI: 10.5862/MCE.56.7 // Magazine of Civil Engineering. – 2015. – № 4 (56). – С. 54–65.
32. Кушова, Д.А. Геометрически нелинейное деформирование и устойчивость плоских упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб / Д.А. Кушова, В.В. Лалин // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2013. Volume 9, Issue 4. – С. 178–185.

### Lalin Vladimir Vladimirovich

Peter the Great Saint-Petersburg polytechnic university, Saint-Petersburg, Russia  
E-mail: vllalin@yandex.ru  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3850-424X>  
РИНЦ: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=536375](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=536375)  
SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=56091980300>

### Nenashev Valentin Sergeevich

Peter the Great Saint-Petersburg polytechnic university, Saint-Petersburg, Russia  
E-mail: v.s.nenashev@gmail.com  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2060-6758>  
РИНЦ: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=884530](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=884530)  
SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57216908348>

### Utimisheva Iana Gennadievna

Peter the Great Saint-Petersburg polytechnic university, Saint-Petersburg, Russia  
E-mail: yanautimisheva@gmail.com  
РИНЦ: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=997485](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=997485)  
SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57216910554>

### Diakov Stanislav Fedorovich

Peter the Great Saint-Petersburg polytechnic university, Saint-Petersburg, Russia  
E-mail: dyakov\_sf@spbstu.ru  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3703-0222>  
РИНЦ: [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=636376](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=636376)  
SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=57210792974>

## Variational approach to stability problem in geometrically exact beam theory

**Abstract.** The article deals with the problems of stability of beams loaded with a potential load. Similar problems have been previously solved using approximate approaches that either take into account simplified beam models or do not take into account the subcritical deformation of the beam (linearized formulations). This article provides exact solutions to stability problems based on the approach of the classical calculus of variations. The exact stability equations are obtained as the Euler equations for the second variation of the Lagrange functional of the original nonlinear static problem. To solve stability problems, the nonlinear geometrically exact theory of beams and the exact nonlinear solution of the statics problem are used. In this paper it is considered that the material of the beam is linearly elastic, that is it follows the Hooke's law. Two problems of the stability of a cantilever in a spatial setting are considered: the problem of the stability of a cantilever loaded with a compressive force and a lateral-torsional buckling of a cantilever loaded with a torque. The value of the critical loads was obtained for both problems. The first problem split into two, and two values of the critical force were obtained, each of them has the form as the value previously obtained by D.A. Kuznetsova and V.V. Lalin for the critical force in a flat formulation. The true value of the critical force is the lower one of the two. The second problem split into two depending on the ratio of the stiffnesses of the beam. The case when both bending stiffnesses are greater than torsional stiffness was considered, that corresponds to all assortment profiles of beams. For this case the final value of the critical moment was obtained. For both problems the results of the obtained formulas were compared with the previously known ones.

**Keywords:** stability; geometrically exact beam theory; critical load; Nikolai paradox; lateral buckling; potential following moment; stability functional