Вестник Евразийской науки / The Eurasian Scientific Journal https://esj.today

2026, Том 18, № 3 / 2026, Vol. 18, Iss. 3 https://esj.today/issue-3-2026.html

URL статьи: https://esj.today/PDF/21SAVN326.pdf

DOI: 10.15862/21SAVN326 (https://doi.org/10.15862/21SAVN326)

2.1.9. Строительная механика (технические науки)

Ссылка для цитирования этой статьи:
Сидоров, В. Н. Вычислительная модель сопротивления рамных конструкций потере устойчивости под действием динамических нагрузок на основе теории С. П. Тимошенко / В. Н. Сидоров, Д. О. Климушкин, Х. А. Адемола // Вестник евразийской науки. — 2026. — Т. 18. — № 3. — URL: https://esj.today/PDF/21SAVN326.pdf. DOI: 10.15862/21SAVN326.

For citation:
Sidorov V.N., Klimushkin D.O., Ademola H.A. Computational model of frame structures resistance to buckling under dynamic loads based on S.P. Timoshenko theory. *The Eurasian Scientific Journal*. 2026;18(3): 21SAVN326. Available at: https://esj.today/PDF/21SAVN326.pdf. DOI: 10.15862/21SAVN326. (In Russ., abstract in Eng.).

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 25-11-00140)

УДК 624.046.3

Сидоров Владимир Николаевич
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Москва, Россия
Заведующий кафедрой «Информатики и прикладной математики»
ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта», Москва, Россия
Институт пути, строительства и сооружений
Профессор кафедры «Строительные конструкции, здания и сооружения»
Доктор технических наук, профессор, академик РААСН
E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8812-8022
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=691222
WoS: https://www.webofscience.com/wos/author/rid/C-3057-2018
SCOPUS: https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=39161892000

Климушкин Дмитрий Олегович
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Москва, Россия
Аспирант кафедры «Информатики и прикладной математики»
E-mail: d.o.klimushkin@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0007-7147-4595
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=1245857
WoS: https://www.webofscience.com/wos/author/rid/KIE-4471-2024

Адемола Хабиб Аджибола
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Москва, Россия
E-mail: ademolahabeeb07@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0000-8795-7128

Вычислительная модель сопротивления рамных конструкций потере устойчивости под действием динамических нагрузок на основе теории С. П. Тимошенко

Аннотация. В статье разработана вычислительная модель оценки сопротивления рамных конструкций потере устойчивости при действии нестационарных динамических нагрузок. Модель построена в рамках метода конечных элементов и ориентирована на стержневые системы, для которых существенное значение имеют сдвиговые деформации, инерционные силы, демпфирование и полная система локальных узловых усилий. В качестве кинематической основы используется балочная постановка Тимошенко, позволяющая уточнить описание деформирования по сравнению с классической моделью Эйлера-Бернулли. Предложенный алгоритм предусматривает пошаговое интегрирование уравнений движения, восстановление внутренних усилий элементов и формирование матриц устойчивости для текущего динамического состояния конструкции. Особое внимание уделено учету поперечных сил и изгибающих моментов при построении геометрической жесткости, а также влиянию динамических составляющих на левую и правую части расчетного уравнения устойчивости. Работоспособность модели показана на примере плоской рамной схемы с гармонической распределенной нагрузкой. Рассмотрены несколько вариантов поперечных сечений элементов, выполнено сопоставление результатов для балочных моделей Тимошенко и Эйлера-Бернулли, а также сравнение с расчетами в программном комплексе SIMULIA Abaqus. Практическая значимость подхода состоит в возможности оценивать изменение запаса устойчивости во времени без сведения динамического воздействия к единственному статическому расчетному случаю. Полученные результаты показывают чувствительность коэффициента запаса устойчивости к принятой балочной гипотезе, жесткостным характеристикам элементов и способу учета динамических усилий.

Ключевые слова: устойчивость; метод конечных элементов; стержневая система; стержневой конечный элемент; динамика; балка Тимошенко; устойчивость в движении

Введение

С появлением цифровых компьютеров в середине XX века началась новая эпоха в строительной механике. Разработка метода конечных элементов (МКЭ), термин для которого был введён **Рэем Клафом** в 1960 году [1], и создание программных комплексов, таких как NASTRAN (1965 г.) [2], позволили моделировать конструкции любой сложности.

В контексте анализа устойчивости МКЭ позволяет реализовать два основных подхода, каждый из которых имеет свою теоретическую основу, область применимости и практическое значение.

а) Линейный анализ устойчивости (линейная бифуркация).

Этот подход представляет собой прямое обобщение классической задачи Эйлера на произвольные конструкции. Он основан на предположении, что до потери устойчивости конструкция ведёт себя линейно-упруго, а геометрические нелинейности учитываются лишь в первом приближении через геометрическую матрицу жёсткости $\mathbf{K}_G$, которая зависит от начального напряжённого состояния. Задача сводится к решению обобщённой проблемы собственных значений:

$$(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{K}_G)\{u\} = 0, \tag{1}$$

где:

K — классическая матрица упругой жёсткости;

λ — множитель критической нагрузки;

{*u*} — соответствующая форма потери устойчивости [3].

Наименьшее собственное значение λ_{min} определяет минимальную нагрузку, при которой возможна бифуркация равновесия.

Преимущества этого метода — высокая скорость расчёта и простота интерпретации. Он широко используется на этапе предварительного проектирования для выявления потенциально слабых зон конструкции и оценки общей устойчивости. Однако его главный недостаток — идеализация. Метод игнорирует начальные несовершенства, нелинейность материала, большие перемещения и пост-критическое поведение. В реальных конструкциях потеря устойчивости, как правило, происходит до достижения эйлеровой нагрузки, и переход в новое состояние происходит плавно, без бифуркации. Поэтому результаты линейного анализа часто завышают несущую способность и не могут быть использованы как основа для окончательного расчёта по методу предельных состояний [4].

б) Нелинейный статический анализ с учётом начальных несовершенств.

Этот подход является современным стандартом для расчёта устойчивости в рамках метода предельных состояний. Он основан на решении полной нелинейной системы уравнений равновесия, включающей как геометрическую, так и физическую нелинейность. Ключевой особенностью является введение в модель нормативных начальных несовершенств — отклонений геометрии, эквивалентных эксцентриситетов или начальных деформаций, которые имитируют реальные отклонения от идеальной формы (непрямолинейность, остаточные напряжения, неточности монтажа).[1]

Расчёт выполняется пошагово (как правило, методом Ньютона–Рафсона [5] или его модификациями [6]), и на каждом шаге строится зависимость «нагрузка–характеристическое перемещение». Анализ продолжается до достижения предельной точки (пика нагрузки) или заданного уровня деформаций. Этот метод позволяет определить реальную предельную несущую способность конструкции, учитывая все основные физические факторы, влияющие на её поведение.

Хотя такой расчёт значительно более трудоёмок, он даёт достоверную картину поведения конструкции и является обязательным для проектирования сложных сооружений, таких как высотные здания, арочные и вантовые мосты, нестационарные конструкции [4]. Современные нормы (например, СП 16.13330[2] Еврокод 3[1]) прямо предписывают использовать этот подход при наличии значительных несовершенств или при проектировании по методу «расчёт на основе анализа».

Таким образом, МКЭ в расчетах на устойчивость, в том числе, сложных конструкций не заменил классические теории, а интегрировал их в более широкую вычислительную парадигму. Формулы Эйлера и Энгессера–Шанли служат контрольными решениями для верификации программ, а концепции гибкости и критического напряжения остаются центральными в инженерном мышлении.

Динамическая устойчивость стержневых систем

Помимо статической устойчивости, большое значение в инженерной практике имеет динамическая устойчивость — способность конструкции сохранять устойчивое равновесие в движении при действии переменных во времени нагрузок. Эта проблема особенно актуальна для расчетного обоснования проектов таких сооружений, как мосты, высотные здания, башни, мачты и элементы машин, подверженные ветровым, сейсмическим или вибрационным воздействиям.

[1] EN 1993-1-1:2005. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-1: General rules and rules for buildings. Brussels: CEN, 2005. 90 p.

[2] СП 16.13330.2017. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. М.: Стандартинформ, 2017. 104 с.

Первые исследования динамической устойчивости были связаны с явлением параметрического резонанса. В 1831 году **Жозеф Луи Франсуа Бертран** показал, что вертикально подвешенный маятник с колеблющейся точкой подвеса может стать неустойчивым даже при малых амплитудах колебаний [7]. Аналогичный эффект наблюдается в сжатых стержнях при периодическом изменении нагрузки. Если частота изменения нагрузки близка к удвоенной собственной частоте изгибных колебаний стержня, может возникнуть неустойчивость, известная как область неустойчивости по **Матьё** [8].

Классическая задача динамической устойчивости сжатого стержня была решена в рамках линейной теории уравнением Матьё:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\omega_0^2 + \alpha \cos \Omega t\right)y = 0, \tag{2}$$

где:

$\boldsymbol{\omega_0}$ — собственная частота свободных колебаний;

$\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ — амплитуда и частота параметрического возбуждения.

Анализ этого уравнения показывает, что при определённых соотношениях между Ω и ω_0 система становится неустойчивой, и амплитуда колебаний неограниченно растёт [9].

В XX веке развитие теории динамической устойчивости было связано с работами **А. М. Ляпунова**, который в 1892 году ввёл строгие критерии устойчивости движения на основе второго метода Ляпунова [10]. Этот подход позволяет анализировать устойчивость нелинейных систем без явного решения дифференциальных уравнений, что особенно важно для сложных конструкций.

Значительный вклад в развитие теории динамической устойчивости внес выдающийся советский учёный **Николай Александрович Алфутов**. В своих работах, обобщённых в монографии *«Основы теории устойчивости деформируемых систем»* (1978, 2-е изд. — 1995)[3], он развил и систематизировал подходы к анализу устойчивости при динамических и параметрических воздействиях. Н. А. Алфутов обобщил критерии Ляпунова на широкий класс задач строительной механики, включая системы с периодически меняющимися параметрами (например, стержни с пульсирующей сжимающей силой). Он показал, что для таких систем устойчивость следует оценивать не по статической критической нагрузке, а по границам областей динамической неустойчивости в пространстве параметров «амплитуда–частота».

Особое внимание Н. А. Алфутов уделил энергетическим критериям динамической устойчивости, которые позволяют оценивать устойчивость без решения дифференциальных уравнений, анализируя знак изменения полной энергии системы при малых возмущениях. Он также рассмотрел влияние демпфирования, которое, в отличие от статического случая, может как стабилизировать, так и дестабилизировать систему в зависимости от частоты возбуждения.[3] Работы Н. А. Алфутова легли в основу преподавания теории устойчивости в ведущих технических вузах СССР и России и остаются актуальными для анализа вибрационной устойчивости современных конструкций.

Современные исследования динамической устойчивости включают:

- Анализ устойчивости при импульсных нагрузках (например, взрыв, удар), где критическим параметром является не только величина, но и длительность импульса [11].

[3]Алфутов Н. А. Основы теории устойчивости деформируемых систем. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1995. 336 с.

- Исследование аэроупругой неустойчивости, такой как флаттер (самовозбуждающиеся колебания из-за взаимодействия с потоком воздуха) и галопирование (автоколебания при обтекании несимметричных профилей), которые привели к обрушению моста Такома-Нарроуз в 1940 году [12].
- Сейсмическая устойчивость, где применяются методы нелинейного динамического анализа с учётом гистерезисного поведения материалов и геометрической нелинейности [13].

В рамках МКЭ динамическая устойчивость анализируется с помощью модального анализа (определение собственных частот и форм колебаний), гармонического анализа (реакция на синусоидальное возбуждение) и временного нелинейного динамического анализа (прямое интегрирование уравнений движения). Эти методы позволяют не только предсказать потерю устойчивости, но и оценить последствия — амплитуды колебаний, накопление повреждений, возможность обрушения.

Основная часть

При численном решении задач расчета конструкций на динамические воздействия, формулируемых уравнением движения Д'Аламбера, это уравнение, как правило, записывается в удобном для вычислений матричном виде:

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\bar{\mathbf{V}}}(t)+\mathbf{D}\cdot\dot{\bar{\mathbf{V}}}(t)+\mathbf{K}\cdot\bar{\mathbf{V}}(t)=\bar{\boldsymbol{F}}(t)\ . \qquad (3)$$

Здесь:

K — матрица жёсткости расчётной модели конструкции;

D — матрица демпфирования расчётной модели;

M — матрица масс расчётной модели;

$\bar{\boldsymbol{F}}(t)$ — вектор изменяющихся во времени *t* внешних силовых воздействий.

Решением уравнения (3) является вектор $\bar{\mathbf{V}}(t)$, содержащий значения перемещений узлов расчётной модели деформируемой конструкции в моменты времени *t*.

Существует несколько подходов к оценке устойчивости стержневой системы. В данной работе рассматриваются два подхода: методика используемая, в частности, в программном комплексе SIMULIA Abaqus и подход прямого пошагового решения канонического уравнения устойчивости, сводящегося к решению обобщенной проблемы собственных значений.

Методология

В настоящей работе во втором подходе решение строится в составе алгоритма метода конечных элементов. При этом матрица жесткости конечного элемента $\mathbf{K}_i$, в том числе, учитывающая влияние сдвиговых деформаций, представляет собой разность двух матриц: стандартной матрицы жесткости балочного конечного элемента (далее КЭ) модели Эйлера–Бернулли[4] и матрицы сдвиговой жесткости, полученной для балки Тимошенко.[5]

[4] Гайджуров П. П. Расчет стержневых систем на устойчивость и колебания. Новочеркасск: ЮРГТУ, 2009.

[5] Тимошенко С. П., Гере Дж. Механика материалов. СПб.: Лань, 2002. 672 с. — URL: https://publ.lib.ru/PODVAL/RUS/T/%D2%E8%EC%EE%F8%E5%ED%EA%EE,%20%D1%F2%E5%EF%E0%ED%20%CF%F0%EE%EA%EE%F4%FC%E5%E2%E8%F7/%d2%e8%ec%ee%f8%e5%ed%ea%ee%20%d1.%cf.,%20%c3%e5%f0%e5%20%c4%e6._%20%cc%e5%f5%e0%ed%e8%ea%e0%20%ec%e0%f2%e5%f0%e8%e0%eb%ee%e2.(2002).pdf (дата обращения: 25.06.2026).

В свою очередь, матрица демпфирования КЭ является суммой двух матриц. Это:

- Матрица демпфирования, моделирующая диссипацию энергии за счет изменения длины продольных волокон каждого предельно малого отрезка *dz* КЭ. Данная матрица выведена из условий минимума модифицированной функции диссипации Релея (4) и соответствует модели балочного элемента Бернулли-Эйлера:

$$Д = \frac{1}{2}\chi \cdot \dot{\varepsilon}^2, \tag{4}$$

где:

χ — коэффициент демпфирования материала;

ε — продольная линейная деформация материала, а точка означает взятие производной по временному аргументу *t*.

Полный вывод данной матрицы представлен в [14].

- Матрица демпфирования, моделирующая диссипацию энергии за счет изменения формы каждого предельно малого отрезка dz КЭ. Данная матрица также выведена на основе подобной модификации функции Релея (5):

$$Д = \frac{1}{2}\chi^{сдв} \cdot \dot{\gamma}^2, \tag{5}$$

где:

$\chi^{сдв}$ — коэффициент демпфирования сдвига материала;

γ — угловая деформация материала.

Полный вывод данной матрицы представлен в [15].

Таким образом, итоговое уточнение уравнения Д'Аламбера принимает вид:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{V}}}(t) + (Д + Д^{сдв}) \cdot \dot{\bar{\mathbf{V}}}(t) + (\mathbf{K} - \mathbf{K}^{сдв}) \cdot \bar{\mathbf{V}}(t) = \bar{\boldsymbol{F}}(t). \tag{3a}$$

При анализе устойчивости системы, выполняемом при пошаговом решении уравнения движения $\bar{\mathbf{V}}(t)$ для моментов времени *t*, условие равновесия механической системы в движении (3), (3а) Д'Аламбера может быть представлено в следующем виде:

$$(\mathbf{A}_{din} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{V}}(t) = \bar{\boldsymbol{F}}(t). \tag{6}$$

Здесь:

E — единичная матрица;

$\mathbf{A}_{din}$ — сумма диагональных матриц $\mathbf{A}_{in}$ и $\mathbf{A}_{damp}$, на главных диагоналях которых находятся коэффициенты инерционных и демпфирующих усилий, вычисляемые поэлементным делением векторов внутренних инерционных $(\mathbf{M} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{V}}})$ и демпфирующих $(\mathbf{D} \cdot \dot{\bar{\mathbf{V}}})$ сил на вектор упругих сил $(\mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{V}})$:

$$\mathbf{A}_{in} = diag((\mathbf{M} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{V}}})_{[i]} : (\mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{V}})_{[i]}) = diag((\bar{\mathbf{S}}_{in})_{[i]} : (\bar{\mathbf{S}}_{el})_{[i]}), \tag{}$$

$$\mathbf{A}_{damp} = diag((\mathbf{D} \cdot \dot{\bar{\mathbf{V}}})_{[i]} : (\mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{V}})_{[i]}) = diag((\bar{\mathbf{S}}_{damp})_{[i]} : (\bar{\mathbf{S}}_{el})_{[i]}), \tag{8}$$

где:

знак «**:**» означает поэлементное деление векторов.

Таким образом, уравнения (3) и (6) равнозначны между собой.

Переходя к задаче численной оценки устойчивости стержневой системы, приведем матричную запись обобщенной проблемы собственных значений, к которой сводится каноническое уравнение устойчивости механической системы под действием упругих (потенциальных) сил:

$$\mathbf{K}\cdot\Phi=\mathbf{K}^{\Gamma}\cdot\Phi\cdot\Lambda. \tag{9}$$

Здесь:

Λ — диагональная матрица коэффициентов запаса устойчивости, характеризующих критические значения внешней нагрузки, вызывающие потерю устойчивости системы;

Ф — матрица, чьи колонки численно моделируют формы потери устойчивости системы, соответствующие критическим значениям нагрузки.

При учете динамических (инерционных и демпфирующих) усилий в форме (6) формулировка (9) примет следующий вид:

$$(\mathbf{A}_{din}+\mathbf{E})\cdot\mathbf{K}\cdot\Phi=\mathbf{K}^{\Gamma}\cdot\Phi\cdot\Lambda, \tag{10}$$

где:

$\mathbf{K}^{\Gamma}$ — матрица геометрической жесткости расчетной модели.

Заметим, что согласно гипотезе лорда Кельвина демпфирующие (диссипативные) силы не влияют на устойчивость системы[6], следуя ей в (10), в матрице $\mathbf{A}_{din}$ мы учитываем только инерционную составляющую $\mathbf{A}_{in}$.

Для оценки полного деформирования расчетной модели важно, как в его матрице жесткости каждого рамного конечного элемента, так и в матрице геометрической жесткости учитывать влияние на его устойчивость как осевых, так и поперечных сил, а также узловых изгибающих моментов. Поэтому итоговая матрица геометрической жесткости представлена суммой трех матриц, отвечающих каждая за деформирование от своих компонентов воздействий. Соответственно, и матрица геометрической жесткости всей конечно-элементной расчетной модели представляется суммой:

$$\mathbf{K}^{\Gamma}=\mathbf{K}_{N}^{\Gamma}+\mathbf{K}_{M}^{\Gamma}+\mathbf{K}_{Q}^{\Gamma}. \tag{11}$$

Здесь:

$\mathbf{K}^{\Gamma}_{N}$ — стандартная матрица геометрической жесткости конечно-элементной расчетной модели, получаемая на основе энергетической теории Тимошенко[5], она учитывает продольный изгиб теряющих устойчивость стержневых конечных элементов только под действием продольных сил. Такая матрица геометрической жесткости одного (i -го)[7] стержневого КЭ.[4] Рассматриваемый в статье рамный конечный элемент, работающий в плоскости, имеет по три степени свободы в каждом из двух его узлов (две взаимоортогональных поступательных и одну поворотную);

$\mathbf{K}^{\Gamma}_{M}$ — матрица геометрической жесткости стержневого КЭ, реализующая вклад изгибающих моментов M в потерю устойчивости;

$\mathbf{K}^{\Gamma}_{Q}$ — матрица геометрической жесткости КЭ, реализующая вклад поперечных сил Q в потерю устойчивости.

---

[6] Алфутов Н. А., Колесников К. С. Устойчивость движения и равновесия. М.: Издательство МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2003. 255 с.

[7] Здесь i — номер конечного элемента в расчетной модели.

Помимо этого динамические составляющие компонентов усилий также необходимо учитывать при составлении геометрических матриц для уравновешивания уже учтенных динамических сил в (10).

Вклад всех компонент узловых сил в потерю устойчивости стержневого КЭ определяем из условия стационарности работы этих сил $\boldsymbol{Э_i}$ (12) (рис. 1).

Рисунок 1. *Деформированное состояние стержневого КЭ (разработано автором)*

$$\boldsymbol{Э}_i(\boldsymbol{v}) = \int_l \left(\frac{1}{2} \cdot N_i \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{z}} \right)^2 + Q_i \cdot \gamma(\boldsymbol{v}) + M_i \cdot \varphi(\boldsymbol{v}) \right) d\boldsymbol{z}\,. \tag{12}$$

Стоит отметить, что в (12) $\boldsymbol{N}_i$, Q_i и M_i — внешние силы, воздействующие на стержневой КЭ через его узлы.

Энергия, затрачиваемая изгибающим моментом M при деформировании стержня определяется значением момента и углом искривления $d\varphi$ оси Oz предельно малого фрагмента стержня dz (рис. 2).

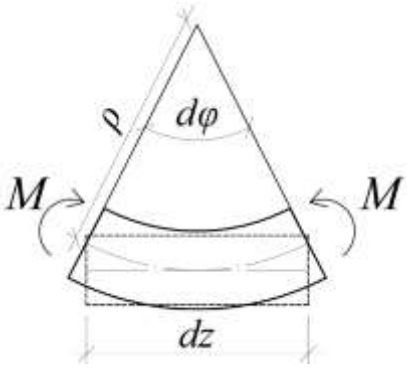


Рисунок 2. *Деформирование предельно малого фрагмента dz стержневого КЭ под действием изгибающего момента M (разработано автором)*

$$\boldsymbol{dП} = M \cdot d\varphi,\ d\varphi = \frac{dz}{\rho},\ \frac{1}{\rho} = \vartheta \approx \frac{d^2 v}{dz^2}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{dП} = M \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} dz\,. \tag{14}$$

Здесь:

dП — энергия, затрачиваемая изгибающим моментом *M* на изгиб фрагмента КЭ *dz*;

v(z) — функция прогибов КЭ;

ϑ(z)– кривизна фрагмента балочного элемента *dz*.

Из условий стационарности энергии, затрачиваемой узловыми изгибающими моментами на деформирование КЭ[8], получаем матрицу $\mathbf{K}^{\Gamma}_{Mi}$ (15).

$$\boldsymbol{K}^{\Gamma}_{Mi} = \frac{4 \cdot EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3 \cdot l & -6 & 3 \cdot l \\ 3 \cdot l & 2 \cdot l^2 & -3 \cdot l & l^2 \\ -6 & -3 \cdot l & 6 & -3 \cdot l \\ 3 \cdot l & l^2 & -3 \cdot l & 2 \cdot l^2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

В ней опущены строки и столбцы, учитывающие вклад осевой компоненты узловых усилий.

Энергия, затрачиваемая поперечной силой *Q* при деформировании предельно малого фрагмента стержня *dz*, определяется значением этой силы и углом сдвига *γ*:

$$\boldsymbol{dП} = Q \cdot \gamma \cdot dz, \ \ \gamma = \frac{\alpha}{GA} Q, \quad (16)$$

$$\boldsymbol{dП} = \frac{\alpha}{GA} \cdot Q \cdot Q \cdot dz, \quad (17)$$

где:

α — коэффициент, учитывающий форму поперечного сечения КЭ.[5]

После аналогичных математических преобразования получаем матрицу $\mathbf{K}^{\Gamma}_{Qi}$ (18):

$$\boldsymbol{K}^{\Gamma}_{Qi} = \frac{24 \cdot \alpha \cdot EJ^2}{l^5 \cdot A} \begin{bmatrix} 4 & 2 \cdot l & -4 & 2 \cdot l \\ 2 \cdot l & l^2 & -2 \cdot l & l^2 \\ -4 & -2 \cdot l & 4 & -2 \cdot l \\ 2 \cdot l & l^2 & -2 \cdot l & l^2 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

[8] Сидоров В. Н., Бадьина Е. С. Метод конечных элементов в задачах устойчивости и колебаний стержневых конструкций. Примеры расчётов в Mathcad и MATLAB. Учебное пособие // М.: Издательство АСВ. 2021. 173 с.

Результаты

Предлагаемая методика, учитывающая динамические воздействия всех составляющих усилий, рассмотрена на примере анализа устойчивости рамной конструкции типа «бегущая лань» (рис. 3).

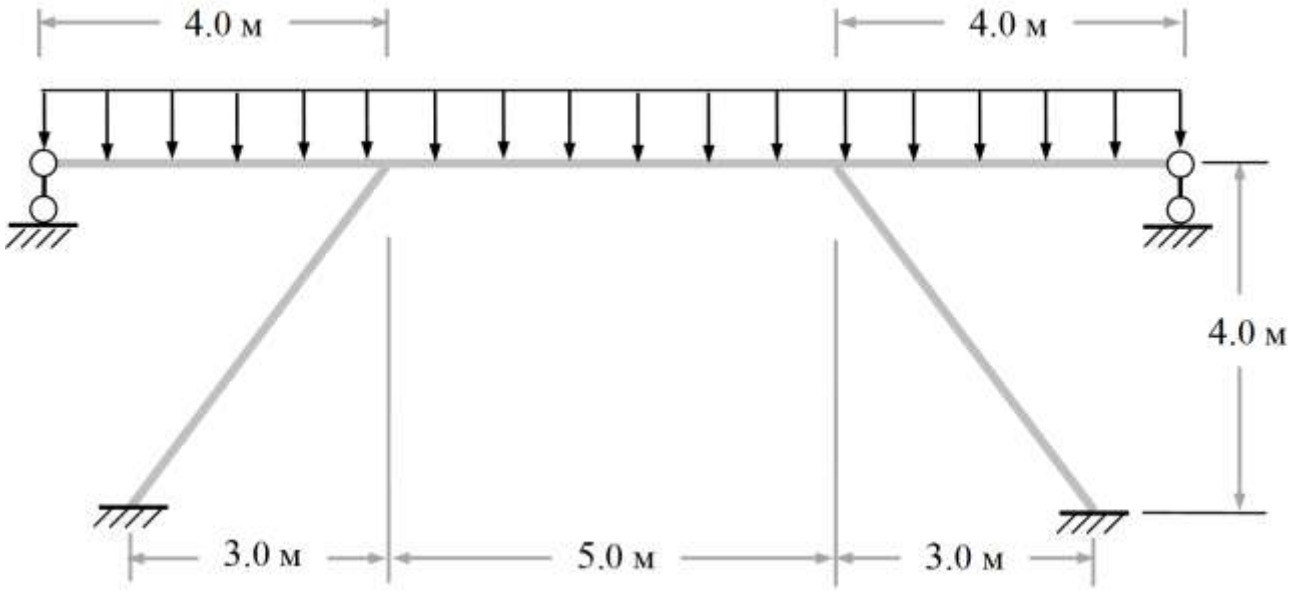


Рисунок 3. *Расчетная схема рамной конструкции (разработано автором)*

Поперечные сечения всех элементов приняты одинаковыми:

- в первом варианте расчета — квадратные 13×13 см
- во втором варианте расчета — прямоугольные 13×26(h) см
- в третьем варианте расчета — прямоугольные 13×52(h) см

Материал всех элементов — сталь с модулем упругости $2{,}06\times10^5$ МПа

Благодаря геометрической, жесткостной симметрии, а также симметрии внешних воздействий построена плоская конечно-элементная расчетная модель только для половины полной расчетной схемы рамы (рис. 4).

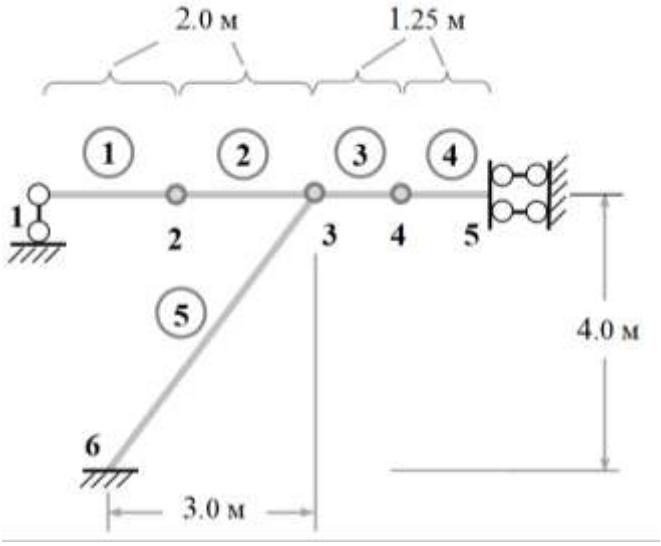


Рисунок 4. *Конечно-элементная расчетная модель рамы (разработано автором)*

Для реализации учета вклада узловых моментов и поперечных сил в потерю общей устойчивости, а также учета вклада динамических составляющих усилий разработана расчетная программа на основе метода конечных элементов на языке программирования Python.

Значение погонной распределенной нагрузки, изменяющееся во времени, определяется суммой двух синусоид (рис. 5).

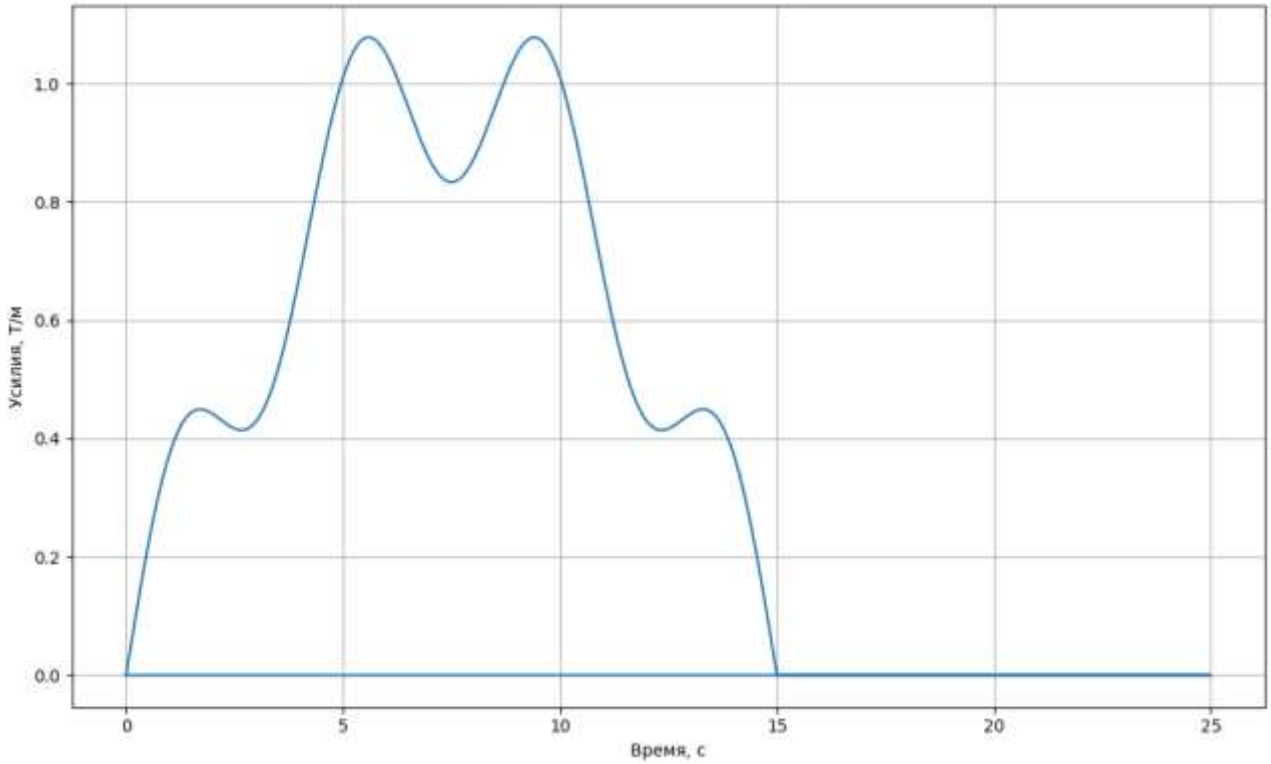


Рисунок 5. *График интенсивности нагрузки (разработано автором)*

Период большой волны синусоиды — 30 с. Период малой волны синусоиды составляет 1/7 от периода большой волны.

В качестве результатов расчетов предоставлены значения коэффициента запаса устойчивости $\mathbf{\Lambda_{min}}$, характеризующего минимальные критические значения нагрузки при различных размерах поперечных сечений элементов рамы для моделей балки Эйлера-Бернулли и балки Тимошенко.

Для сравнения результатов была исследована устойчивость расчетной модели рассматриваемой конструкции в программном комплексе SIMULIA Abaqus. Однако здесь нет возможности оценивать устойчивость конструкции при динамических воздействиях, меняющихся во времени. В программном комплексе решается задача статической устойчивости с максимальным (амплитудным) значением меняющейся во времени погонной нагрузки, в нашем случае 1,2 Т/м ~12 кН/м.

Также решается задача квазистатической устойчивости с учетом динамических усилий (путем домножения статической нагрузки на матрицу $\mathbf{A}_{din}$) для i шага во времени, в котором наблюдается наименьшее значение собственного числа Λ (см. (9)), и решается задача устойчивости с квазистатическими нагрузками в нелинейной постановке по деформированной схеме, в которой учтены перемещения узлов расчетной схемы, полученные при помощи на языке программирования Python (табл. 1–3). Задача в нелинейной постановке решается по методу Рикса (методу длины дуги) [16].

Вариант 1.

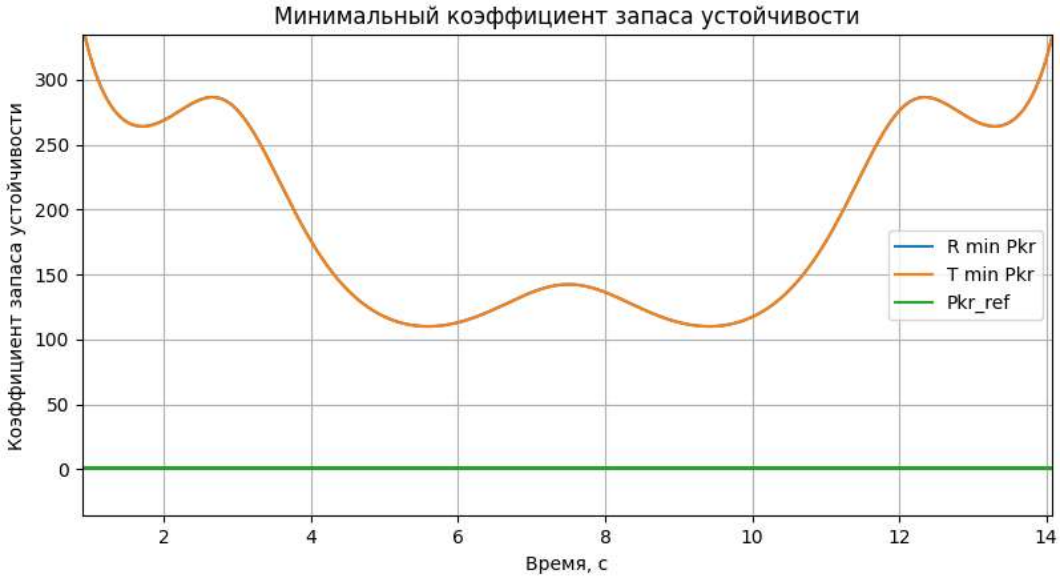
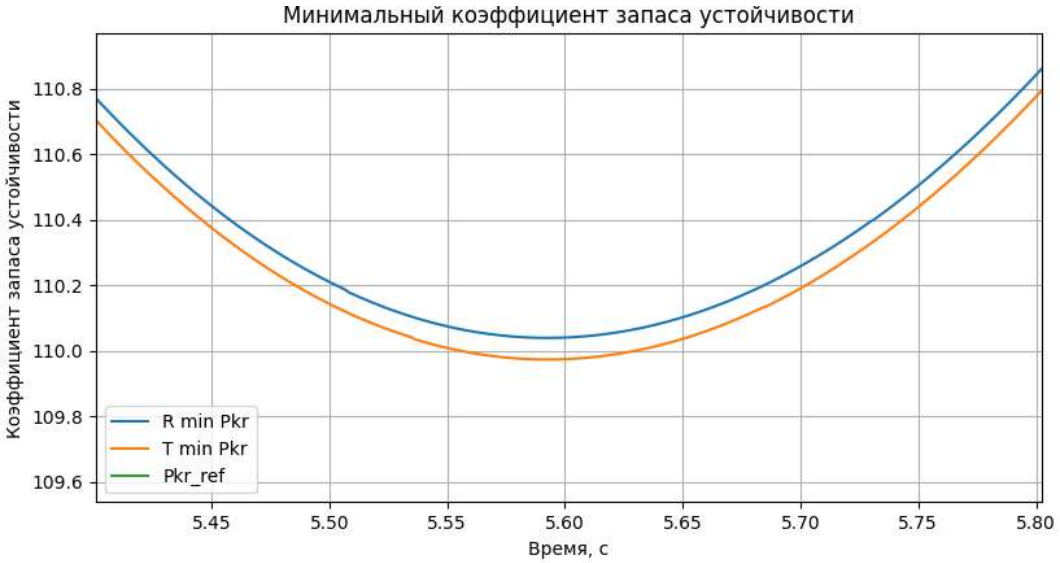


Рисунок 6. *Значение коэффициента запаса устойчивости (вариант 1) (разработано автором)*



Синяя линия — КЭ на основе модели балки Эйлера–Бернулли (Λ_{min} = 110,1); оранжевая линия — КЭ на основе модели балки Тимошенко (Λ_{min} = 109,9); зеленая линия — критическое значение коэффициента запаса устойчивости (Λ_{min} = 1)

Рисунок 7. *Значение коэффициента запаса устойчивости (вариант 1) (укрупненно) (разработано автором)*

Разница в значениях коэффициентов запаса устойчивости модели балки Эйлера–Бернулли и модели балки Тимошенко составляет 0,002 % (рис. 6, 7).

Исследование устойчивости расчетной схемы рассматриваемой конструкции в программном комплексе SIMULIA Abaqus

Были выполнены четыре расчета для каждого варианта поперечного сечения: Линейный расчет со статическими нагрузками, нелинейный расчет со статическими нагрузками, нелинейный расчет с квазистатическими нагрузками, и нелинейный расчет деформированной схемы с квазистатическими нагрузками.

Линейный расчет со статическими нагрузками.

Значение Λ_{min} согласно SIMULIA Abaqus для данного варианта составляет 132,42.

Нелинейный расчет со статическими нагрузками.

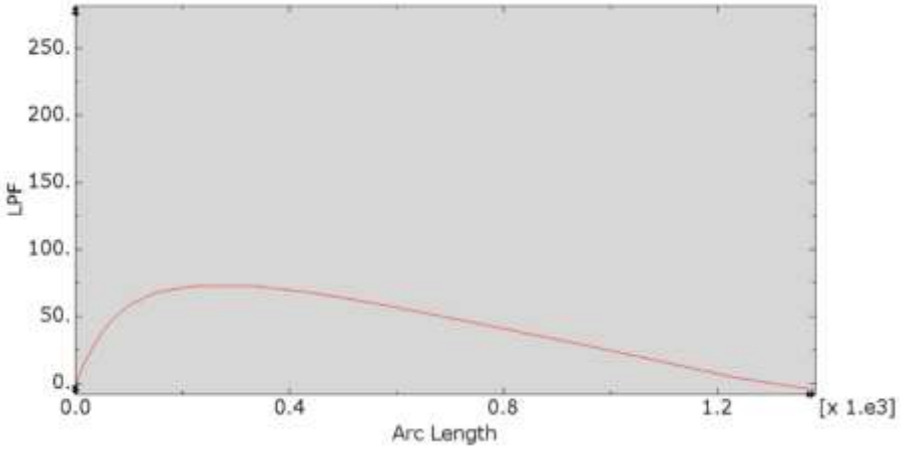


Рисунок 8. *График зависимости Load Proportionality Factor (LPF) от Arc Length (разработано автором)*

Значение Λ_{min} согласно SIMULIA Abaqus для данного варианта составляет 72,96 (рис. 8).

Нелинейный расчет с квазистатическими нагрузками.

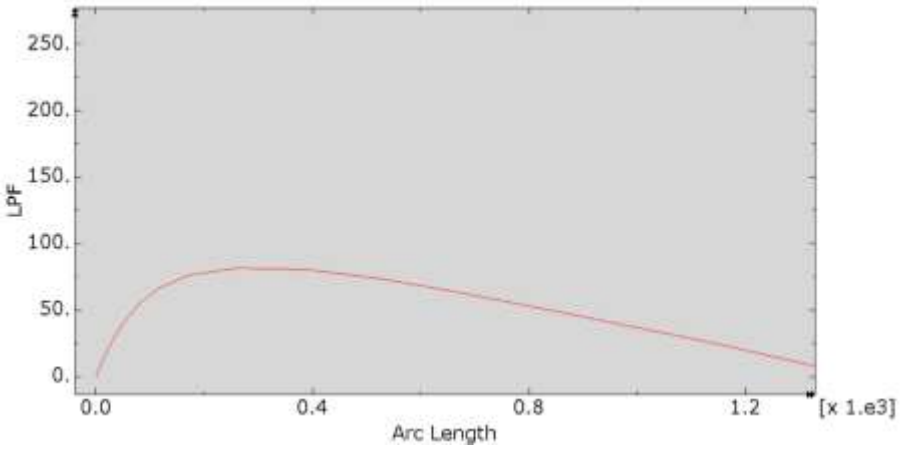


Рисунок 9. *График зависимости Load Proportionality Factor (LPF) от Arc Length (разработано автором)*

Значение Λ_{min} согласно SIMULIA Abaqus для данного варианта составляет 81,42 (рис. 9).

Нелинейный расчет деформированной схемы с квазистатическими нагрузками.

Таблица 1

Перемещение узлов (вариант 1)

Узел	x0	y0	ux	uy	phi
1	0,00	0,00	4,039307e-05	0,000000e+00	-1,941736e-03
2	2,00	0,00	3,795128e-05	-2,211647e-03	5,659944e-04
3	4,00	0,00	3,582340e-05	-1,443850e-04	-5,388177e-04
4	5,25	0,00	1,661225e-05	-2,633489e-03	-2,386455e-03
5	6,50	0,00	0,000000e+00	-4,346207e-03	0,000000e+00
6	1,00	-4,00	0,000000e+00	0,000000e+00	0,000000e+00

Разработано автором

Значение Λ_{min} согласно SIMULIA Abaqus для данного варианта составляет 54,14 (рис. 10).

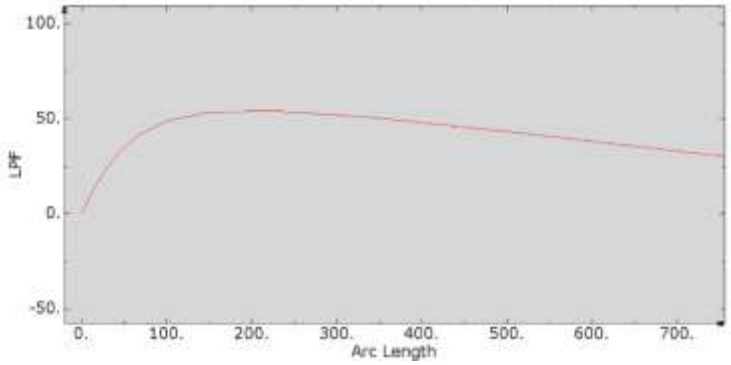


Рисунок 10. *График зависимости Load Proportionality Factor (LPF) от Arc Length (разработано автором)*

Вариант 2.

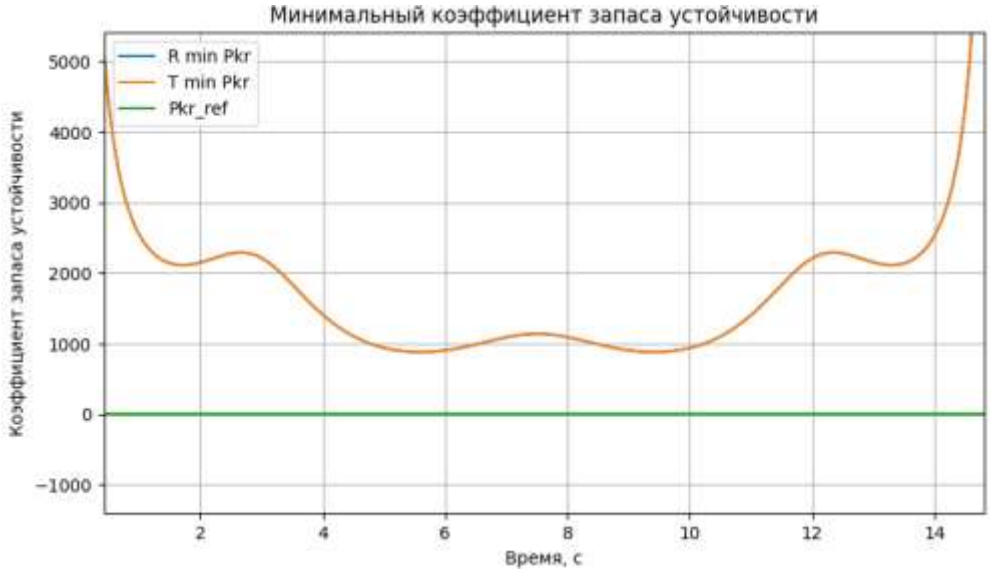
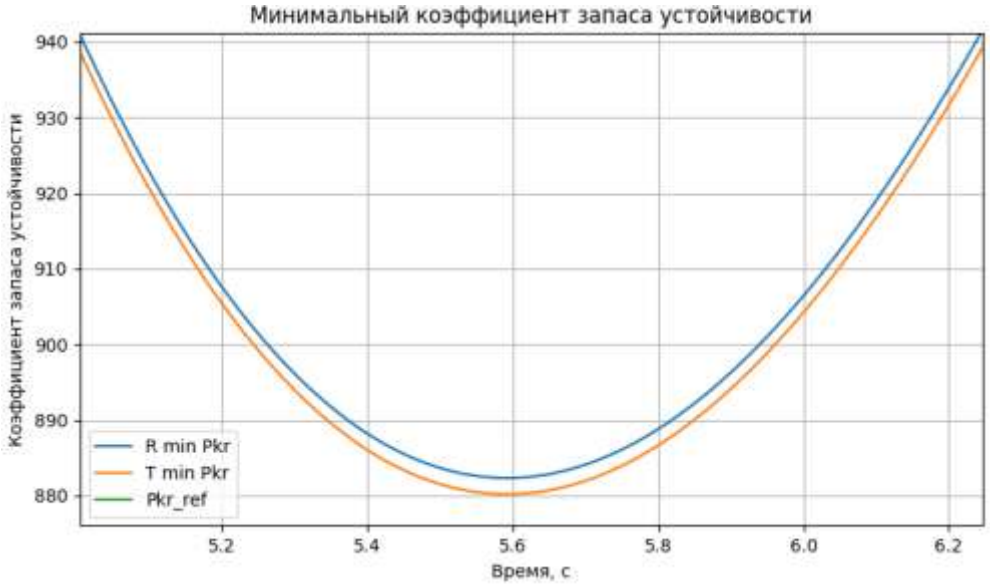


Рисунок 11. *Значение коэффициента запаса устойчивости (вариант 2) (разработано автором)*



Синяя линия — КЭ на основе модели балки Эйлера–Бернулли (Λ_{min} = 883); оранжевая линия — КЭ на основе модели балки Тимошенко (Λ_{min} = 880); зеленая линия — критическое значение коэффициента запаса устойчивости (Λ_{min} = 1)

Рисунок 12. *Значение коэффициента запаса устойчивости (вариант 2) (укрупненно) (разработано автором)*

Разница в значениях коэффициентов запаса устойчивости модели балки Эйлера–Бернулли и модели балки Тимошенко составляет 0,4 % (рис. 11, 12).

Исследование устойчивости расчетной схемы рассматриваемой конструкции в программном комплексе SIMULIA Abaqus

Линейный расчет со статическими нагрузками.

Значение Λ_{min} согласно SIMULIA Abaqus для данного варианта составляет 1042,6.

Нелинейный расчет со статическими нагрузками.

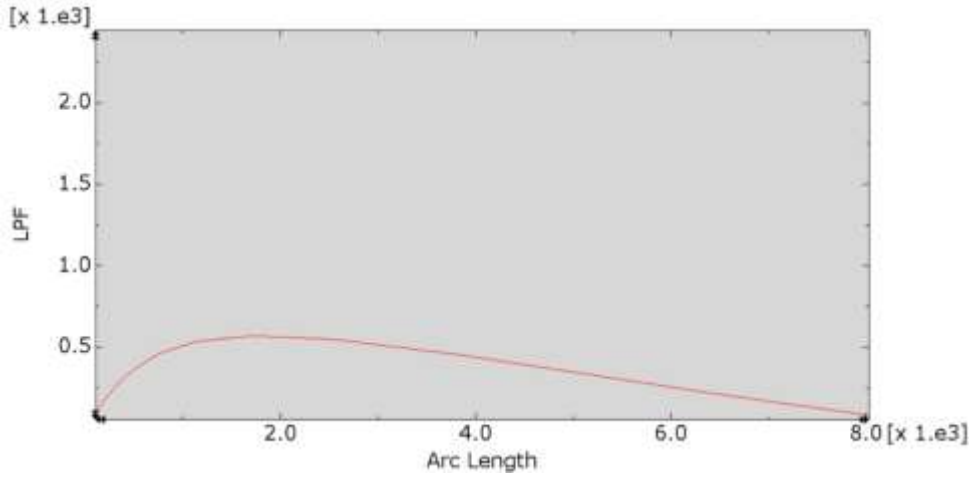


Рисунок 13. *График зависимости Load Proportionality Factor (LPF) от Arc Length (разработано автором)*

Значение Λ_{min} согласно SIMULIA Abaqus для данного варианта составляет 570,54 (рис. 13).

Нелинейный расчет с квазистатическими нагрузками.

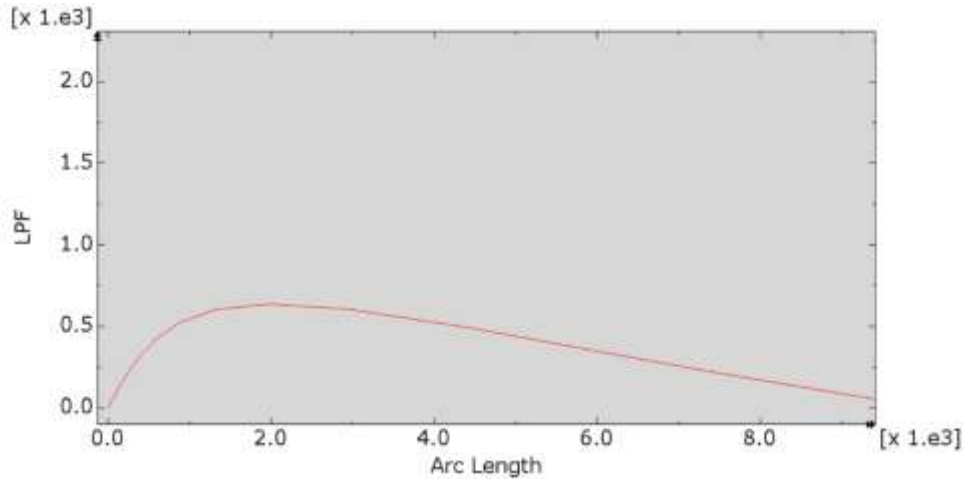


Рисунок 14. *График зависимости Load Proportionality Factor (LPF) от Arc Length (разработано автором)*

Значение Λ_{min} согласно SIMULIA Abaqus для данного варианта составляет 635,82 (рис. 14).

Нелинейный расчет деформированной схемы с квазистатическими нагрузками.

Значение Λ_{min} согласно SIMULIA Abaqus для данного варианта составляет 422,33 (рис. 15).

Таблица 2

Перемещение узлов (вариант 2)

Узел	x0	y0	ux	uy	phi
1	0,00	0,00	1,441974e-05	0,000000e+00	-2,576115e-04
2	2,00	0,00	1,437343e-05	-3,052360e-04	5,736884e-05
3	4,00	0,00	1,434613e-05	-6,942972e-05	-7,600843e-05
4	5,25	0,00	7,151549e-06	-3,876361e-04	-3,014314e-04
5	6,50	0,00	0,000000e+00	-6,034794e-04	0,000000e+00
6	1,00	-4,00	0,000000e+00	0,000000e+00	0,000000e+00

Разработано автором

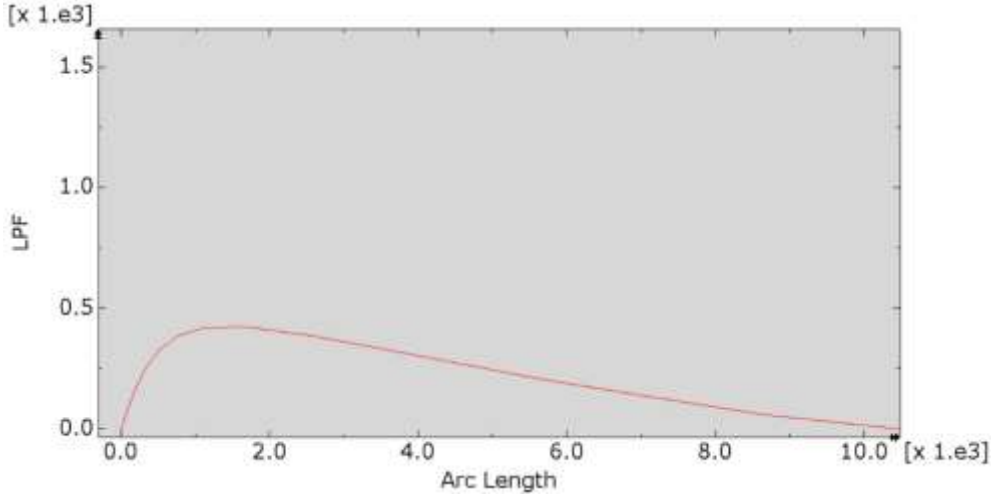


Рисунок 15. *График зависимости Load Proportionality Factor (LPF) от Arc Length (разработано автором)*

Вариант 3.

Разница в значениях коэффициентов запаса устойчивости модели балки Эйлера-Бернулли и модели балки Тимошенко составляет 13 % (рис. 16, 17).

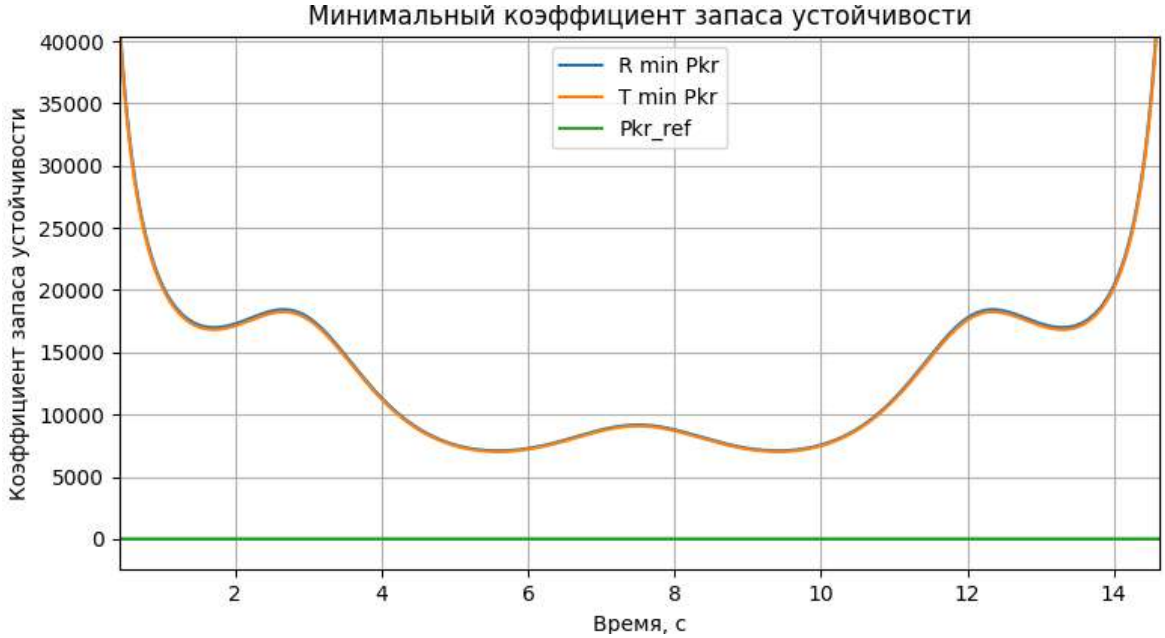
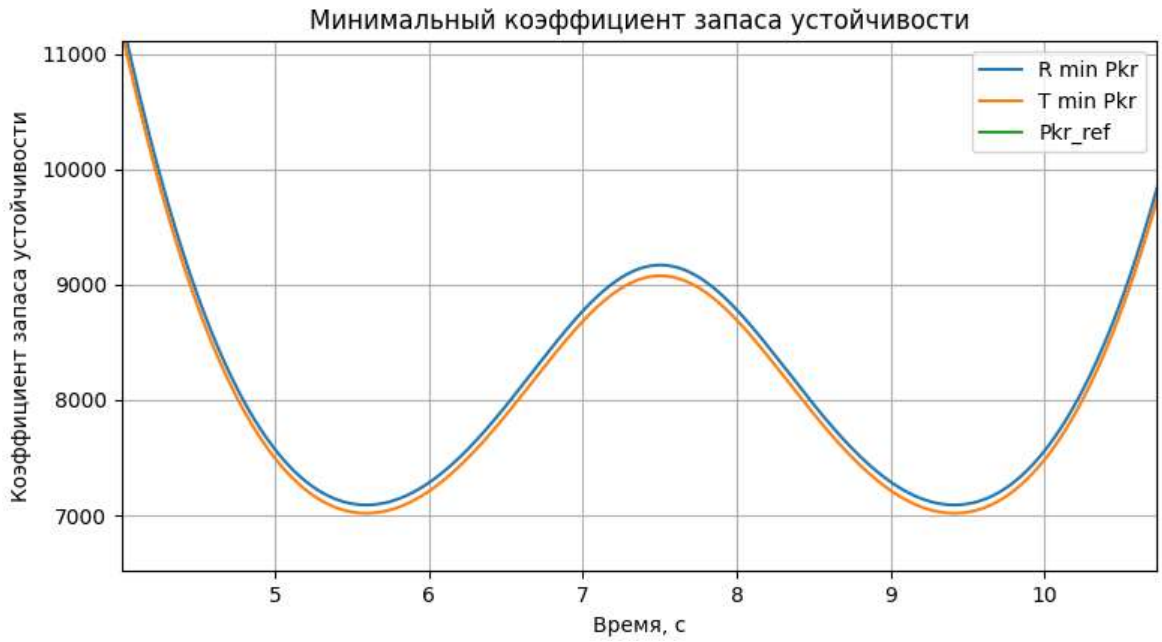


Рисунок 16. *Значение коэффициента запаса устойчивости (вариант 3) (разработано автором)*



Синяя линия — КЭ на основе модели балки Эйлера-Бернулли (Λ_{min} = 7090); оранжевая линия — КЭ на основе модели балки Тимошенко (Λ_{min} = 7000); зеленая линия — целевое значение коэффициента запаса устойчивости (Λ_{min} = 1)

Рисунок 17. *Значение коэффициента запаса устойчивости (вариант 3) (укрупненно) (разработано автором)*

Исследование устойчивости расчетной схемы рассматриваемой конструкции в программном комплексе SIMULIA Abaqus

Линейный расчет со статическими нагрузками.

Значение Λ_{min} согласно SIMULIA Abaqus для данного варианта составляет 7849,3.

Нелинейный расчет со статическими нагрузками.

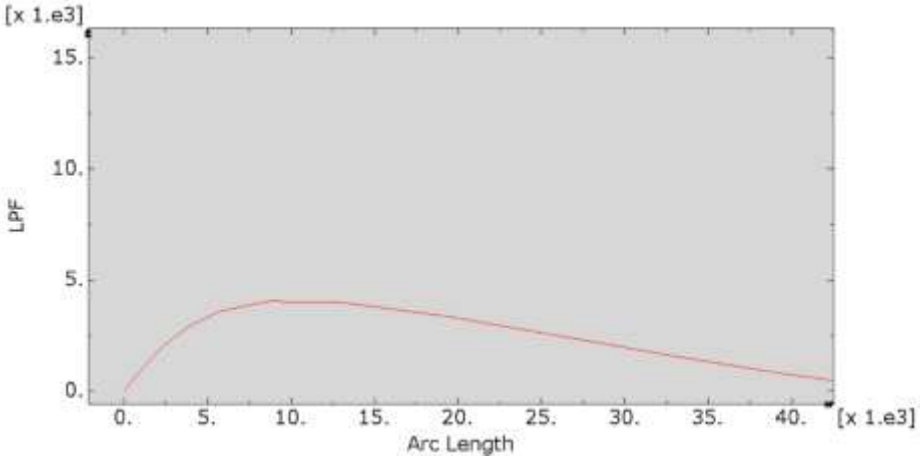


Рисунок 18. *График зависимости Load Proportionality Factor (LPF) от Arc Length (разработано автором)*

Значение Λ_{min} согласно SIMULIA Abaqus для данного варианта составляет 4039,84 (рис. 18).

Нелинейный расчет с квазистатическими нагрузками.

Значение Λ_{min} согласно SIMULIA Abaqus для данного варианта составляет 4518,42 (рис. 19).

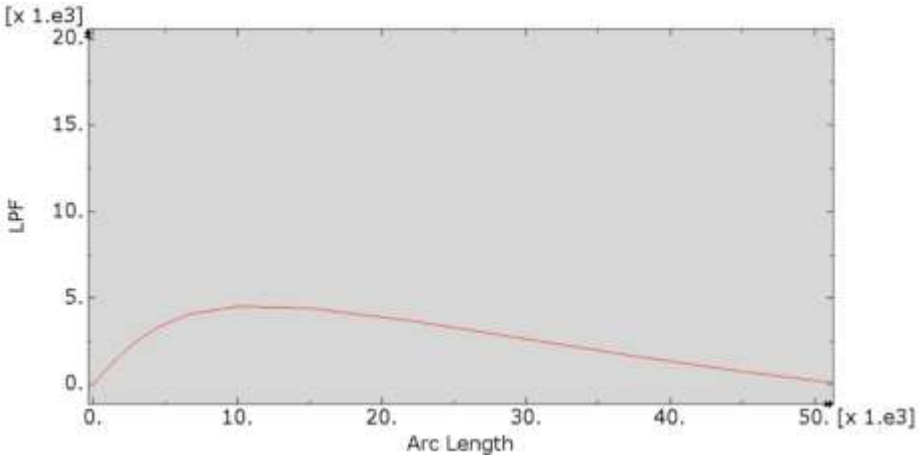


Рисунок 19. *График зависимости*
Load Proportionality Factor (LPF) от Arc Length (разработано автором)

Нелинейный расчет деформированной схемы с квазистатическими нагрузками.

Таблица 3

Перемещение узлов (вариант 3)

Узел	x0	y0	ux	uy	phi
1	0,00	0,00	7,056293e-06	0,000000e+00	-3,944449e-05
2	2,00	0,00	7,054952e-06	-5,224536e-05	5,209461e-07
3	4,00	0,00	7,054813e-06	-3,450335e-05	-1,439432e-05
4	5,25	0,00	3,526969e-06	-7,885606e-05	-4,011283e-05
5	6,50	0,00	0,000000e+00	-1,073553e-04	0,000000e+00
6	1,00	-4,00	0,000000e+00	0,000000e+00	0,000000e+00

Разработано автором

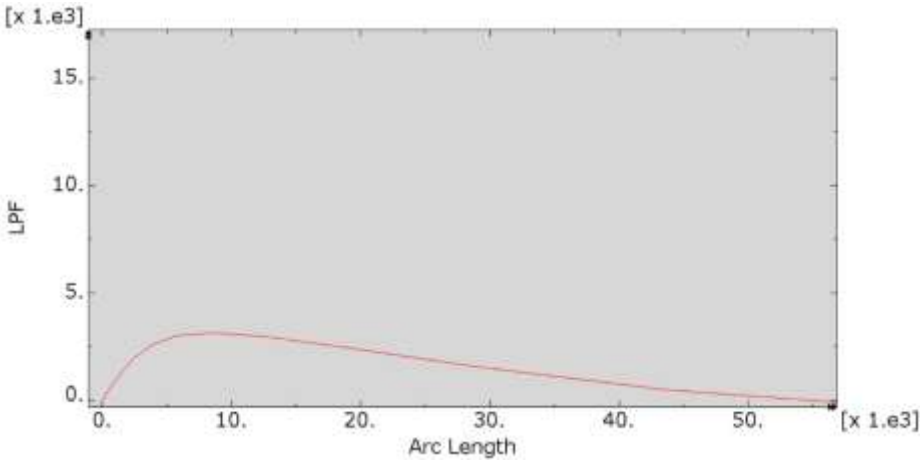


Рисунок 20. *График зависимости*
Load Proportionality Factor (LPF) от Arc Length (разработано автором)

Значение Λ_{min} согласно SIMULIA Abaqus для данного варианта составляет 3156,47 (рис. 20).

Заключение

Согласно результатам, представленным на графиках минимальных значений Λmin, можно сделать следующий вывод: предлагаемая методика расчета устойчивости в движении показывает больший запас устойчивости в сравнении с квазистатическими методами, но

меньший чем простой расчет по линейной схеме на максимальное значение внешнего воздействия. Данная методика может использоваться как вспомогательный инструмент для определения наиболее опасного момента времени для конструкции под действием динамических сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Clough R.W. The finite element method in plane stress analysis // Proceedings of the 2nd ASCE Conference on Electronic Computation. Pittsburgh, 1960. P. 35. — URL: https://books.google.nl/books/about/The_Finite_Element_Method_in_Plane_Stres.html?id=rfwFHQAACAAJ&redir_esc=y (дата обращения: 25.06.2026).
2. MacNeal R.H. The NASTRAN Theoretical Manual. NASA SP-221. Washington: NASA, 1973. 532 p. — URL: https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19790019360/downloads/19790019360.pdf (дата обращения: 25.06.2026).
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2014. 624 p. — URL: https://shop.elsevier.com/books/the-finite-element-method-for-solid-and-structural-mechanics/zienkiewicz/978-1-85617-634-7 (дата обращения: 25.06.2026).
4. Chen W.F., Lui E.M. Structural Stability: Theory and Implementation. New York: Elsevier, 1987. 490 p. — URL: https://archive.org/details/structuralstabil0000chen/page/n5/mode/2up (дата обращения: 25.06.2026).
5. Raphson J. Analysis Aequationum Universalis. Londini, 1690. 54 p. — URL: https://archive.org/details/bub_gb_4nlbAAAAQAAJ/page/n5/mode/2up (дата обращения: 25.06.2026).
6. Simpson T. Essays on Several Curious and Useful Subjects in Speculative and Mix'd Mathematicks. London: H. Woodfall, 1740. 152 p. — URL: https://archive.org/details/essaysonseveralc00simp/mode/2up (дата обращения: 25.06.2026).
7. Bertrand J. Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. 1831. Vol. 17. P. 849–853. — URL: http://www.lajpe.org/dec11/LAJPE_600_Alexander_Tort_preprint_corr_f.pdf (дата обращения: 25.06.2026).
8. Bolotin V.V. The Dynamic Stability of Elastic Systems. San Francisco: Holden-Day, 1964. 432 p. — URL: https://www.science.org/doi/10.1126/science.148.3670.627.b (дата обращения: 25.06.2026).
9. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. New York: Wiley, 1979. 704 p. — URL: https://archive.org/details/NonlinOscNayfeh/mode/2up (дата обращения: 25.06.2026).
10. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 473 с. — URL: https://www.phantastike.com/math/obshchaya_zadacha/djvu/view/ (дата обращения: 25.06.2026).
11. Simitses G.J., Hodges D.H. Fundamentals of Structural Stability. Burlington: Butterworth-Heinemann, 2006. 389 p. — URL: https://books.google.nl/books/about/Fundamentals_of_Structural_Stability.html?id=HRyVL3-6WTAC&redir_esc=y (дата обращения: 25.06.2026).

12. Scanlan R.H. The action of wind on suspension bridges // Journal of Engineering Mechanics. 1991. Vol. 117, no. 4. P. 813–832. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1991)117:4(813).
13. Priestley M.J.N., Calvi G.M., Kowalsky M.J. Displacement-Based Seismic Design of Structures. Pavia: IUSS Press, 2007. 720 p. — URL: https://scispace.com/pdf/displacement-based-seismic-design-of-structures-sdigr6nkuc.pdf (дата обращения: 25.06.2026).
14. Sidorov V.N., Badina E.S., Detina E.P. Nonlocal in time model of material damping in composite structural elements dynamic analysis // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2021. Vol. 17, no. 4. P. 14–21. DOI: 10.22337/2587-9618-2021-17-4-14-21.
15. Сидоров В.Н., Бадьина Е.С., Климушкин Д.О. Модификация функции диссипации Рэлея для численного моделирования внутреннего демпфирования в стержневых конструкциях // Вестник МГСУ. 2024. Т. 19, № 6. С. 960–970. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.6.960-970.
16. Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems // International Journal of Solids and Structures. 1979. Vol. 15, № 7. P. 529–551. — DOI: 10.1016/0020-7683(79)90081-7.

Sidorov Vladimir Nikolaevich
Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia
Russian University of Transport, Moscow, Russia
Institute of Railway, Construction and Facilities
E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8812-8022
RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=691222
WoS: https://www.webofscience.com/wos/author/rid/C-3057-2018
SCOPUS: https://www.scopus.com/authid/detail.url?authorId=39161892000

Klimushkin Dmitrii Olegovych
Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia
E-mail: d.o.klimushkin@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0007-7147-4595
RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=1245857
WoS: https://www.webofscience.com/wos/author/rid/KIE-4471-2024

Ademola Habeeb Ajibola
Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia
E-mail: ademolahabeeb07@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0000-8795-7128

Computational model of frame structures resistance to buckling under dynamic loads based on S.P. Timoshenko theory

Abstract. The paper develops a computational model for evaluating the resistance of frame structures to buckling under nonstationary dynamic loading. The model is formulated within the finite element method and is intended for rod systems in which shear deformation, inertial forces, damping, and the complete set of local nodal force components are significant. The kinematic description is based on the Timoshenko beam theory, which provides a refined representation of structural deformation in comparison with the classical Euler-Bernoulli beam model. The proposed algorithm includes step-by-step integration of the equations of motion, recovery of element internal forces, and assembly of stability matrices corresponding to the current dynamic state of the structure. Particular attention is given to the contribution of axial forces, shear forces, and bending moments to the geometric stiffness matrix, as well as to the influence of dynamic force components on both sides of the stability equation. The applicability of the model is demonstrated using a plane frame subjected to a periodically varying distributed load. Several cross-section configurations are considered, and the results obtained for Timoshenko and Euler-Bernoulli beam formulations are compared with numerical simulations performed in SIMULIA Abaqus. The results indicate that the stability reserve factor is sensitive to the adopted beam hypothesis, element stiffness parameters, and the procedure used to include dynamic internal forces.

Keywords: buckling; finite element method; rod system; rod finite element; dynamic; Timoshenko beam; dynamic stability