Вестник Евразийской науки / The Eurasian Scientific Journal https://esj.today

2020, №1, Том 12 / 2020, No 1, Vol 12 https://esj.today/issue-1-2020.html

URL статьи: https://esj.today/PDF/37SAVN120.pdf

Ссылка для цитирования этой статьи:
Федотов П.В., Кочетков А.В. О решениях математических задач в физике и строительной механике на основе топологических векторов // Вестник Евразийской науки, 2020 №1, https://esj.today/PDF/37SAVN120.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

For citation:
Fedotov P.V., Kochetkov A.V. (2020). On solutions of mathematical problems in physics and construction mechanics based on topological vectors. *The Eurasian Scientific Journal*, [online] 1(12). Available at: https://esj.today/PDF/37SAVN120.pdf (in Russian)

УДК 514.8

Федотов Петр Викторович
МОО «Профессиональный инженер», Москва, Россия
Эксперт
E-mail: klk50@mail.ru

Кочетков Андрей Викторович
ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Пермь, Россия
Профессор
Доктор технических наук, профессор
E-mail: soni.81@mail.ru

О решениях математических задач в физике и строительной механике на основе топологических векторов

Аннотация. Показано, что введение топологических векторов в математику приводит к ситуации, когда в элементарных функциях легко интегрируются целый класс дифференциальных уравнений механики, которые в настоящее время либо вовсе не интегрируются, либо интегрируются в сложных функциях, например, в эллиптических интегралах или в бесконечных рядах.

Сформулировано определение неевклидового вектора:

Топологический (неевклидовый) вектор – это направленный отрезок геодезической кривой (соответствующей геометрии) проходящий через две точки, принадлежащих одной неевклидовой плоскости. Причем одна точка (точка А) является началом топологического вектора, а другая (точка В) – концом топологического вектора. По определению геодезической, она принадлежит той же неевклидовой плоскости, в которой расположены точки А и В.

Легко видеть, что принятию такого определения топологических векторов, не мешает ничего кроме привычки называть вектором именно отрезком прямой и никакой другой линии. По сути, это определение не является чем-то принципиально противоречащим современному определению вектора, принятого в современной науке, кроме как расширение понятия евклидового вектора, на неевклидовые пространства.

Переход от трехмерного движения сферического маятника к задаче движения того же маятника по неевклидовой плоскости (сфере) сводит задачу к двумерному движению. А доказательство закона сохранения кинетического момента для топологических векторов в

неевклидовом пространстве сводит задачу к одномерному случаю в неевклидовом пространстве.

Т. о. задачи больших колебаний плоского маятника и движения сферического маятника интегрируется в элементарных функциях, чего невозможно достичь в рамках современной науки, при обязательном использовании только евклидовых векторов.

Предлагаемый авторами статьи метод позволяет полностью решить задачу движения сферического маятника в элементарных функциях.

Ключевые слова: сферический маятник; элементарные функции; векторы в математике и физике; топологические векторы; топологическая механика; корты; форты

Введение

В различных технических приложениях, в частности в физике, в строительной механике, в транспортном строительстве, например, в сейсмике, описании механики строительных баб, подъемно-транспортных и дорожно-строительных машин, часто возникает необходимость применения моделей маятника. Эти задачи характерны наличием ограниченных степеней свободы и изменением ориентации движущихся тел [1–11].

Между тем такие задачи при внимательном рассмотрении оказываются обладающими определенной спецификой, требующей внимательного и тщательного рассмотрения.

В первой статье [12] приведены предложения по введению топологических векторов (кортов и фортов). Но некоторые аспекты проблемы были недостаточно освещены. Поэтому остановимся на некоторых из них подробнее.

В частности, в предыдущей статье не было акцентировано, в каких случаях выгодно применять топологические вектора, а в каких случаях их применение неэффективно либо вовсе невозможно.

В физике существуют различные задачи. Условно их можно разделить на простые и сложные. Простые задачи решаются просто, так сказать «в лоб». Причем понятие «простоты» физической задачи сводится не только к тому, чтобы было найдено решение, но и к тому, чтобы методика решения была интуитивно понятна, и полученный результат выражался в элементарных функциях. Сложные задачи, которые не решаются «в лоб», пытаются решать различными способами. Самый эффективный способ – это сведение условий задачи к уже известным решениям. Но такой способ не всегда реализуем. Для того, чтобы свести задачу к уже известным решениям, необходимо, чтобы существовали дополнительные теоремы, позволяющие свести одну задачу к решению другой задачи. В одних случаях такие дополнительные теоремы существуют, и задача сводится к решению уже известной задачи.

В других случаях таких вспомогательных теорем не существует, и задача не сводится к задачам, решение которых уже известно. В этих случаях задачу решают уже напрямую, тоже «в лоб», но уже с привлечением неэлементарных функций, например, эллиптических интегралов и т. д. Также надо отметить, что существует множество задач, которые вовсе не решаются ни каким образом, ни применением ни простых, ни сложных методов.

В динамике движения материальной точки во внешнем потенциальном поле, по-настоящему, решена одна единственная задача, это задача одномерного движения точки во внешнем поле. Так, в [4, с. 21] сказано, буквально следующее: «В большинстве случаев (например, в задаче трех тел) не удается ни решить систему дифференциальных уравнений движения, ни достаточно полно исследовать поведение решений». Далее [4, с. 26] уточняется:

«Анализ общей потенциальной системы с двумя степенями свободы выходит за рамки возможностей современной науки».

Надо понимать, что решению не поддаются не только общие задачи динамики в трехмерном пространстве, но и некоторые двумерные задачи. Тем не менее, если трехмерные задачи движения выходят за рамки возможностей решения в элементарных функциях для современной науки, то некоторые задачи двумерного (плоского) движения, все-таки удается решить достаточно просто. В источниках, например [4, с. 34], говорится: «Закон сохранения кинетического момента позволяет свести задачу о движении в центральном поле к задаче с одной степенью свободы. Благодаря этому движение в центральном поле можно исследовать полностью». Как и сказано выше, если существует дополнительная теорема, позволяющая свести задачу к уже известным решениям, то задача может быть решена полностью, если нет, то задача переходит в разряд сложно решаемых либо нерешенных задач.

В частности, в динамке материальной точки именно существование теоремы (закона) сохранения кинетического момента позволяет свести задачи плоского движения (задача Кеплера) к одномерному случаю и т. о., решить задачу полностью. Причем автор [4] специально оговаривает, что общая двумерная задача в современной науке не решается, а решаются только те частные случаи, для которых применима теорема (закон) сохранения кинетического момента относительно точки. Поскольку идентичной теоремы для трехмерного движения не существует, то и задачи динамики движения точки с тремя степенями свободы в современной науке простыми способами не решаются.

Надо отметить, что для трехмерного движения точки существует аналогичная теорема о сохранении кинетического момента относительно оси. Но только для осесимметричного поля [4, с. 44], а не центрального, как в случае плоского движения. Проблема состоит в том, что, во-первых, вместо центрального поля вводится осесимметричное поле.

Задачи небесной механики имеют дело с центральными полями. Во-вторых, наличие теоремы о сохранении кинетического момента точки относительно оси не позволяет свести задачу к одномерному случаю, и даже свести, хотя бы к движению с двумя степенями свободы. Т. о. задача трехмерного движения с тремя степенями свободы переходит из разряда простых в разряд сложных задач.

Задача о движении сферического маятника относится к задачам трехмерного движения. Как сказано выше, в современной науке не сводится к одномерной задаче, соответственно она не может быть решена простыми методами в элементарных функциях. Тем не менее задача решена путем привлечения совсем не элементарных эллиптических интегралов [3; 6; 7].

Предлагаемый авторами статьи [12; 14] метод позволяет полностью решить задачу движения сферического маятника в элементарных функциях.

Обобщение понятия вектора

Прежде чем обсуждать непосредственно предлагаемый метод, необходимо ввести вводные понятия и определения. В частности, ввести понятие топологического (обобщенного) вектора.

В современной учебной и научной литературе широко используется понятие вектора. Приведем несколько определений вектора, встречающиеся в современной литературе.

«Под ***вектором*** в элементарной математике понимают направленный отрезок. Этот отрезок изображается стрелкой и обозначается или одной буквой со стрелкой ($a \equiv AB$) (рисунок 1), либо жирным шрифтом **A, B, a, α**» [9].

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

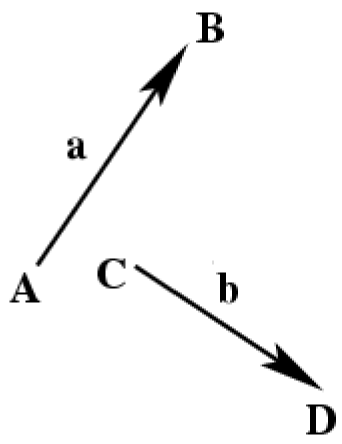

Рисунок 1. *Векторы (рисунок авторов)*

«Вектор представляет собой геометрический объект, характеризуемый длиной и направлением» [16, с. 88].

«В геометрии вектором (в узком смысле) называется всякий направленный отрезок» [8, с. 135].

«Вектором в пространстве (на плоскости) называется множество всех равных между собой направленных отрезков, начала и концы которых принадлежат пространству (плоскости)» [10, с. 17].

Мы специально привели в одном месте несколько аналогичных определений одного и того же объекта, чтобы явно показать, что ни в одном из определений вектора не сказано, что отрезок линии, означающий вектор, обязательно должен быть отрезком прямой линии.

Тем не менее подсознательно под определением вектора понимается именно отрезок прямой и никакой другой линии.

Этот момент объясняется в средней школе при изучении начальной геометрии [например, см. 5, с. 193]. После этого этот момент уходит в подсознание и становится догматом веры [13, с. 276] и уже в вузовских учебниках не акцентируется, так как в этом нет нужды.

Любопытно определение вектора, приведенное в математической энциклопедии: «Вектор геометрический – направленный отрезок прямой евклидового пространства, у которого один конец (точка А) называется началом вектора, другой конец (точка В) концом вектора» [15, с. 313]. Это определение интересно тем, что оно ясно указывает, что вектор – это не просто математический объект, а математический объект евклидового пространства. Причем никаких упоминаний о соответствующих объектах для неевклидовых пространств в современной учебной и научной литературе не встречается. Другими словами, векторы бывают только евклидовыми, а неевклидовых векторов как бы не существует.

Тем не менее, расширение понятия векторов для неевклидовых пространств можно ввести довольно легко. Для этого надо вспомнить два важных свойства прямых в евклидовом пространстве.

1. Отрезок прямой – наиболее короткое расстояние между двумя точками.
2. Прямая проходящая через две точки принадлежит той же плоскости, в которой лежат указанные точки.

Но, в неевклидовой геометрии это совсем не так. Во-первых, кратчайшим расстоянием между двумя точками в неевклидовой плоскости, является не прямая, а геодезическая. И во-вторых, прямая проходящая через две точки принадлежащих неевклидовой плоскости не лежит в той же неевклидовой плоскости. Т. е., определение вектора, как направленного отрезка прямой, для неевклидовой геометрии явно не подходит. А вот определение неевклидового вектора, как направленного отрезка геодезической кривой подходит абсолютно. Т. к. геодезическая в неевклидовой геометрии – кратчайшее расстояние между двумя точками неевклидовой плоскости. А также геодезическая, проходящая через две точки принадлежащих неевклидовой плоскости, принадлежит той же самой неевклидовой плоскости.

Сформулируем определение неевклидового вектора:

Топологический (неевклидовый) вектор – это направленный отрезок геодезической кривой (соответствующей геометрии) проходящий через две точки, принадлежащих одной неевклидовой плоскости. Причем одна точка (точка А) является началом топологического вектора, а другая (точка В) – концом топологического вектора. По определению геодезической, она принадлежит той же неевклидовой плоскости, в которой расположены точки А и В.

Легко видеть, что принятию такого определения топологических векторов не мешает ничего, кроме привычки называть вектором именно отрезок прямой и никакой другой линии. По сути, это определение не является чем-то принципиально противоречащим современному определению вектора, принятого в современной науке, кроме как расширение понятия евклидового вектора на неевклидовые пространства.

Смысл введения топологических векторов

Для того, чтобы понять, для чего нужны топологические векторы, обратимся к тензорному анализу. Такой переход не является неестественным, т. к. векторы являются частным случаем тензоров.

Так в [18] сказано следующее: «Векторы, матрицы и тензоры – это упорядоченные множества величин. *Вектор* является одномерным упорядоченным множеством, т. е. величиной, для описания которой необходим один индекс. *Матрицы* представляют собой двумерные множества, для упорядочивания которых нужны два индекса. Наиболее общей упорядоченной величиной является тензор. Число индексов, необходимых для построения тензора называется его рангом. Таким образом, вектор является тензором первого ранга, матрица – тензором второго ранга, а *скаляр* – тензором нулевого ранга» [18, с. 403].

Мы вынуждены от векторного анализа перейти к тензорному, потому, что с одной стороны, тензоры являются обобщением понятия векторов и все проблемы, появляющиеся в тензорном анализе, автоматически появятся и в векторном анализе. А с другой стороны – проблема, которая обсуждается в данной статье, в векторном анализе не описана. Проблема состоит в символах Кристоффеля.

«Величины $\Gamma^{j}{}_{ik}$ называются коэффициентами связности или символами Кристоффеля. Если координаты декартовы, то e_n – постоянные векторы, поэтому $\Gamma^{j}{}_{nk} \equiv 0$, тогда как для криволинейной системы координат $\Gamma^{j}{}_{ik}$ не равны нулю» [2, с. 19].

Причем, «Величины $\Gamma^{j}{}_{ik}$ являются функциями координат и называются символами Кристоффеля или коэффициентами связности» [17, с. 79]. Если выражается точнее, то символы Кристоффеля являются функциями связи между старыми и новыми системами координат. Именно поэтому при переходе от декартовых к декартовым же координатам символы Кристоффеля тождественно равны нулю, а при переходе от декартовых к криволинейным координатам это уже не так.

Остается понять, так ли уж важны и нужны символы Кристоффеля при решении задач в неевклидовой геометрии?

Оказывается, что тут все дело в первоначальной постановке задачи.

Если мы пойдем традиционным путем, а именно для начала введем в пространстве декартову систему координат в рамках евклидовой геометрии, а затем перейдем к неевклидовой (криволинейной) системе координат, то символы связности или символы Кристоффеля появятся автоматически, как необходимая связь между различными геометриями.

Второе свойство символов связности, хотя и не оговаривается специально, тем не менее, явно следует из свойств символов Кристоффеля. Так в [11] сказано, что если в пространстве кроме декартовой системы координат $\boldsymbol{R_i}$ имеется некоторая криволинейная система координат $\boldsymbol{X^j}$, то «рассмотрим производные векторов базиса $\partial R_i / \partial X^j$. Поскольку при фиксированных значениях i и j, объект $\partial R_i / \partial X^j$ тоже является вектором, то его можно разложить по векторам базиса R_j:

$$\frac{\partial R_i}{\partial X^j} = \Gamma^k_{ij} R_k .$$

Коэффициенты разложения Γ^j_{ik} называют символами Кристоффеля» [11, с. 401]. Отсюда ясно, что символы Кристоффеля появляются только при операции дифференцирования векторов заданных в декартовой и криволинейных базисах. Именно поэтому в тензорной алгебре, где отсутствуют дифференциальные операторы, символы Кристоффеля отсутствуют.

Но главный недостаток символов Кристоффеля не в том, что они существуют, а в том, что они не являются тензорами. «Символы Кристоффеля не являются компонентами тензора, при переходе из одной системы координат в другую они преобразуются по закону, отличному от тензорного» [11, с. 402].

Т. о., как только мы включаем операции дифференцирования векторов, то автоматически получаем символы Кристоффеля в дифференциальные уравнения.

В векторном анализе в явном виде символы Кристоффеля не появляются, но т. к. выше сказано, что векторы являются частным случаем тензоров, как тензоры первого ранга. То совершенно ясно, что в векторном анализе будут те же проблемы, что и в тензорном. Т. к. в векторном анализе также применяются операции дифференцирования векторов.

Решение физических задач с привлечением топологических векторов

Перейдем теперь к решению физических задач, в частности, к решению задач механики.

Дело в том, что все уравнения механики векторные, т. е., неизбежны операции с векторами. Причем под решением задач механики понимается интегрирование векторных уравнений. При этом, если интегрирование дифференциальных уравнений механики в евклидовом пространстве в декартовых координатах не вызывает никаких трудностей, чуть сложнее процесс интегрирования в евклидовом пространстве полярных координатах, при решении задачи Кеплера. Интегрирование уравнений движения материальной точки, поддается решению только в отдельных случаях, остальные задачи, а тем более решение задач механики в случае трехмерного движения материальной точки «выходит за рамки возможностей современной науки» [4, с. 26].

Причина таких сложностей объяснена выше. Все дело в том, что интегрируются уравнения, построенные на криволинейных координатах, жизненно связанных с декартовыми координатами изначального базиса.

37SAVN120
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Эту связь между декартовыми и криволинейными координатами оборвать невозможно, т. к. хотя задачу решают в криволинейных координатах, но векторы при этом декартовые. Потому что других векторов в современной литературе не существует.

Вот таким образом и получается, что сначала мы создаем искусственные трудности, а затем героически боремся с трудностями, которые создали своими руками. Судя по результатам, трудности нас побеждают.

Результаты следующие: интегрирование уравнений в неевклидовом пространстве вызывает настолько большие трудности, что в решения получены только в виде сложных функций, либо в виде эллиптических интегралов, либо в виде бесконечных рядов. Причем эллиптические интегралы даются либо в виде таблиц, либо в виде тех же бесконечных рядов. Фактически решение дается приближенно при ограничении членов бесконечного ряда, а точное решение для аналитического исследования параметров движения не поддается усилиям [1].

Исходя из вышеизложенного, трудность интегрирования в том, что в дифференциальные векторные уравнения движения точки входят члены, не только описывающие движение самой точки, но и члены, описывающие взаимную связь между евклидовым и неевклидовым базисами. Те самые символы связи, например символы Кристоффеля или другие, но одинаковые по смыслу. Причем, если старый и новый базисы декартовые, то никаких трудностей в интегрировании уравнений не возникает.

Обсуждение полученных результатов

Предложение авторов состоит в том, что законы механики не должны зависеть от геометрии. Т. е. силы и реакции материальной точки на внешние силы одни и те же независимо от того, в каком базисе описывается движение.

Соответственно, если описывать движение материальной точки под действием внешних сил в любом базисе, законы движения должны быть идентичны. Соответственно, если в дифференциальных уравнениях движения будут отсутствовать члены описывающие связь между различными базисами, то независимо от того, в каком базисе написаны уравнения, интегрироваться они будут одинаково.

Чтобы достичь такого состояния необходимо ввести топологические (неевклидовые) векторы. Потому, что именно из ситуации, когда задача описывается в неевклидовом базисе, а векторы в евклидовом и возникает связи между старыми и новыми базисами уже на стадии постановки задачи и соответственно на стадии написания дифференциальных уравнений, которые необходимо интегрировать. В этом случае никак не удастся избавиться от членов связи между старым и новым базисом. Если же ставить задачу изначально в неевклидовом базисе, и ввести понятие неевклидовых векторов соответствующей геометрии, то члены дифференциального уравнения отражающего связи базисов исчезнут. И дифференциальное уравнение будет интегрироваться одинаково в любых базисах.

Переход к декартовой системе координат, в которой необходимо получать окончательное решение необходимо делать не на этапе постановки задачи, а только после получения решения дифференциальных уравнений в неевклидовом пространстве.

В этом случае, перевод решения в виде траектории движения не вызывает ни каких сложностей. Т. к. никаких уравнений решать не надо, нужно только перевести координаты неевклидовой поверхности в трехмерное евклидовое пространство. Подобный переход не вызывает никаких трудностей.

Если решение задачи больших колебаний плоского маятника при использовании топологических векторов не вызывает никаких трудностей вообще [12; 14], т. к. переводит задачу из трехмерного движения в одномерный, вдоль линии траектории, которая из-за наличия связи является частью окружности. То в случае сферического маятника задача сложнее, но не на много. В [12] приведено доказательство закона сохранения кинетического момента для неевклидового пространства. Доказательство основано на постулате принципа наследования свойств математических объектов [12].

В данном случае, этот принцип гласит, что если при доказательстве теоремы или закона не применяется в явном или неявном виде требование обязательного свойства векторов быть только прямыми и никак иначе, то этот закон или теорема может быть сформулирована и доказана для векторов любых геометрических свойств. Если нет требования, что вектор должен быть прямым, значит, то же самое может быть применено для вектора любой кривизны.

Далее задача движения сферического маятника на неевклидовой поверхности (сфере) решается точно так же, как и задача Кеплера, путем перевода задачи к одномерной [4, с. 35]. Причем специально оговаривается, что именно наличие закона сохранения кинетического момента позволяет решить задачу плоского движения материальной точки в центральном поле [4, с. 34].

Выводы

Переход от трехмерного движения сферического маятника к задаче движения того же маятника по неевклидовой плоскости (сфере) сводит задачу к двумерному движению. Доказательство закона сохранения кинетического момента для топологических векторов в неевклидовом пространстве [12] сводит задачу к одномерному случаю в неевклидовом пространстве.

Т. о. задачи больших колебаний плоского маятника и движения сферического маятника интегрируется в элементарных функциях, чего невозможно достичь в рамках современной науки, при обязательном использовании только евклидовых векторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adlaj S. An eloquent formula for the perimeter of an ellipse / Notices of the AMS. 59(8), pp. 1096–1097.
2. Амензаде Ю.А. Теория упругости. Учебник для университетов. М.: Высшая школа, 1976 – 272 с.
3. Аппель П. Теоретическая механика. Статика. Динамика точки. Т. 1. – М.: Физматгиз. 1960. – 515 с.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989 – 472 с.
5. Атанасян Л.С. Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Юдина И.И. Геометрия 7–9 классы. – М.: Просвещение, 2010 – 384 с.
6. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. – М.: Наука. 1965. – 468 с.
7. Валле-Пуссен. Лекции по теоретической механике. Т. 1. – М.: ИЛ, 1948. – 339 с.

8. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ: Астрель, 2005 – 991 с.
9. Гордиенко А.Б., Золотарев М.Л., Кравченко Н.Г. Основы векторного и тензорного анализа: учебное пособие. – Кемерово: Кемеровский государственный университет. 2009 – 133 с.
10. Гусятников П.Б., Резниченко С.В. Векторная алгебра в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов инж.-тех. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1985. – 232 с.
11. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учебное пособие для ВУЗов. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.
12. Кочетков А.В., Федотов П.В. Новые методические подходы решения сферического маятника в элементарных функциях. Введение в топологическую механику // Вестник Евразийской науки, 2019. № 2.
13. Кочетков А.В., Федотов П.В. Проблемы гармонизации радикальных противоречий в аксиоматике естественных наук. – М.: Машиностроение, 2015. – 320 с.
14. Кочетков А.В., Федотов П.В. Решение задачи движения сферического маятника методом топологических векторов // Вестник Евразийской науки, 2019. № 6.
15. Математическая энциклопедия, т.1. – М. 1977. – 576 с.
16. Рублев А.Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. Учебник для втузов. – М.: Высшая школа, 1972. 424 с.
17. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. – М.: Наука. 1970 – 492 с.
18. Фларри П. Квантовая химия. Введение. – М.: Мир. 1985 – 472 с.

Fedotov Petr Viktorovich
Interregional public organization «Professional engineer», Moscow, Russia
E-mail: klk50@mail.ru

Kochetkov Andrey Viktorovich
Perm national research polytechnical university, Perm, Russia
E-mail: soni.81@mail.ru

On solutions of mathematical problems in physics and construction mechanics based on topological vectors

Abstract. It is shown that the introduction of topological vectors in mathematics leads to a situation where an entire class of differential equations of mechanics can be easily integrated in elementary functions, which are currently either not integrated at all, or integrated in complex functions, for example, in elliptic integrals or in infinite series.

The definition of a non-Euclidean vector is formulated:

A topological (non-Euclidean) vector is a directed segment of a geodesic curve (corresponding to the geometry) passing through two points belonging to the same non-Euclidean plane. Moreover, one point (point A) is the beginning of the topological vector, and the other (point B) is the end of the topological vector. By definition, geodesic, it belongs to the same non-Euclidean plane in which points A and B are located. It is easy to see that the adoption of such a definition of topological vectors does not prevent anything except the habit of calling the vector a segment of a straight line and no other line. In fact, this definition is not something fundamentally contrary to the modern definition of a vector accepted in modern science, except as an extension of the concept of a Euclidean vector to non-Euclidean spaces.

The transition from the three-dimensional motion of a spherical pendulum to the problem of the same pendulum moving along a non-Euclidean plane (sphere) reduces the problem to a two-dimensional motion. And the proof of the kinetic moment conservation law for topological vectors in a non-Euclidean space reduces the problem to a one-dimensional case in a non-Euclidean space.

Thus, the problem of large oscillations of a plane pendulum and the motion of a spherical pendulum is integrated in elementary functions, which is impossible to achieve in the framework of modern science, with the mandatory use of only Euclidean vectors. The method proposed by the authors allows us to completely solve the problem of the motion of a spherical pendulum in elementary functions.

Keywords: spherical pendulum; elementary functions; vectors in mathematics and physics; topological vectors; topological mechanics; court; fort