Вестник Евразийской науки / The Eurasian Scientific Journal https://esj.today

2019, №6, Том 11 / 2019, No 6, Vol 11 https://esj.today/issue-6-2019.html

URL статьи: https://esj.today/PDF/39SAVN619.pdf

Ссылка для цитирования этой статьи:
Кочетков А.В., Федотов П.В. Решение задачи движения сферического маятника методом топологических векторов // Вестник Евразийской науки, 2019 №6, https://esj.today/PDF/39SAVN619.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

For citation:
Kochetkov A.V., Fedotov P.V. (2019). Solution of the problem of motion of a spherical pendulum by the method of topological vectors. *The Eurasian Scientific Journal*, [online] 6(11). Available at: https://esj.today/PDF/39SAVN619.pdf (in Russian)

УДК 531.53

Кочетков Андрей Викторович
ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Пермь, Россия
Профессор
Доктор технических наук, профессор
E-mail: soni.81@mail.ru

Федотов Петр Викторович
МОО «Профессиональный инженер», Москва, Россия
Эксперт
E-mail: klk50@mail.ru

Решение задачи движения сферического маятника методом топологических векторов

Аннотация. Показано, что понятие топологических векторов, введенное в первой статье, означает обобщение понятия евклидовых векторов, принятых в современной научной и учебной литературе.

Сущность метода топологических векторов состоит в переходе от евклидового трехмерного пространства к неевклидовой плоскости. Основной принцип такого перехода состоит в том, что реальные векторы внешних сил, действующих в евклидовом пространстве, заменяются топологическими векторами, действующими в неевклидовой плоскости.

Показано, что такой переход во многих случаях позволяет упростить решение сложных задач. В частности, показано, что методом топологических векторов вместо предлагаемого в современной литературе как единственное решение задачи движения сферического маятника в виде эллиптических интегралов, в статье приводится решение в виде решения задачи Кеплера для орбитального движения материальной точки. Данная задача легко решается в элементарных функциях и служит эффективной заменой решения в эллиптических интегралах, какими сейчас предлагается решать задачу сферического маятника в современной научной и учебной литературе, как единственно возможное решение. Аналогично можно решать многочисленные задачи движения тел в сложных условиях, существенно упрощая и само решение, и методы его достижения.

Главное преимущество метода топологических векторов для задач движения материальной точки с ограничивающими связями состоит в том, что если в евклидовом пространстве движение всегда трехмерно, то в неевклидовом пространстве это движение, как максимум двумерно. Причем, если траектория движения материальной точки известна заранее,

то задача сводится к одномерному движению вдоль неевклидовой линии, т. е. движение одномерно.

Ключевые слова: сферический маятник; элементарные функции; векторы в математике и физике; топологические векторы; топологическая механика; корты; форты

Введение

В первой статье [1] приведены предложения по введению топологических векторов (кортов и фортов). Но некоторые аспекты проблемы были недостаточно освещены. Поэтому остановимся на некоторых из них подробнее.

В частности, в предыдущей статье не было акцентировано, в каких случаях выгодно применять топологические вектора, а в каких случаях их применение неэффективно либо вовсе невозможно.

В первую очередь отметим, в каких случаях применение топологических векторов невозможно. Это случаи свободного движения материальной точки в трехмерном пространстве, как уже сказано в [1], топологические вектора предназначены для описания движения материальной точки со связями, ограничивающими движение точки в пределах поверхности или линии, которые можно определить в рамках соответствующей геометрии.

Рассмотрим конкретный пример. Векторное поле определяется обычно как область пространства G, в каждой точке M которой определен вектор $n(M)$ [2]. Примерами векторных полей являются поле сил тяготения, возникающее в пространстве вокруг материального тела, поле скоростей стационарного потока жидкости, электростатическое поле и др. [3].

Особое значение имеет геометрическая характеристика векторного поля под названием *векторные линии* [4] или линии тока векторного поля [2], т. е. кривые, в любой точке которых касательная к ним совпадает с вектором поля. Например, для гравитационного поля одного материального тела векторные линии – это прямые, всюду параллельные силам притяжения.

В общем случае, векторные линии – это кривые, при условии, что в каждой точке поля линии тока векторного поля касательны к векторам поля. В частности, кривыми, обычно, бывают линии тока стационарного течения жидкости (см. рисунок 1).

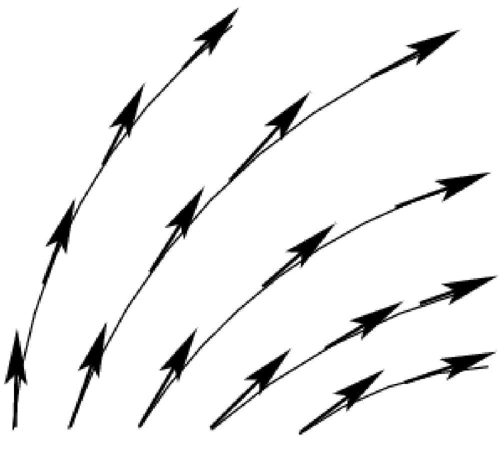

Рисунок 1. *Линии тока стационарного потока жидкости (рисунок авторов)*

«Например, в случае стационарного течения жидкости векторные линии можно рассматривать как траектории движения частиц жидкости, а количество линий будет пропорционально числу частиц» [4]. Отметим, что каждая частица движется по конкретной линии тока, а общая картина векторного поля получается, если рассматривать одновременно много частиц. Т. е. если рассматривать одну единственную частицу, то мы получим одну единственную линию тока (см. рисунок 2).

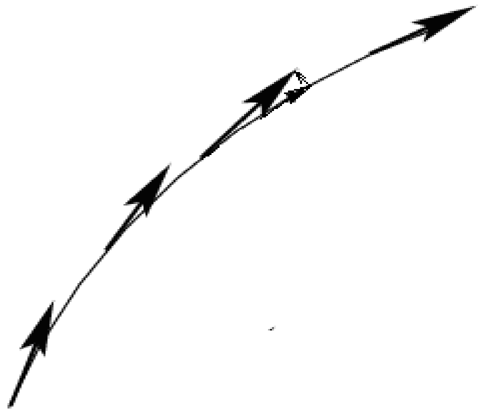

Рисунок 2. *Единственная линия тока и разложение вектора поля на составляющие (рисунок авторов)*

На рисунке 1 и рисунке 2, хорошо видно, что если линии тока кривые, то вектор поля только в одной точке касается линии тока. Соответственно на рисунке 2 показано, что вектор поля в любой точке можно разложить на тангенциальную и нормальную составляющие вектора. Это принципиально важный вопрос, поэтому остановимся на нем подробнее.

Ясно, что тангенциальная составляющая вектора поля будет строго следовать кривой линии тока, а нормальная составляющая – перпендикулярна линии тока. Но, если вектор поля – это вектор скорости, то, как бы не был направлен вектор, частица будет двигаться исключительно вдоль линии тока, ни в одном месте не отклоняясь от заданной кривой.

Это в свою очередь означает, что можно исключить из рассмотрения нормальную составляющую вектора и рассматривать только тангенциальную составляющую вектора. В случае, если вектор поля – это вектор скорости, то тангенциальная составляющая вектора скорости будет равна скорости движения частицы в малой окрестности точки. Легко представить, что этот тангенциальный вектор является геодезической кривой вдоль криволинейной линии тока. Т. е. тангенциальный вектор будет криволинейным.

Причем его длина будет равна длине евклидового (прямолинейного) вектора. Это следует из того, что длина нормальной составляющей вектора скорости равна нулю, т. к. ни в одной точке линии тока материальная частица не отклоняется от криволинейной траектории. Т. о. замена прямолинейного вектора криволинейным, фактически является математической абстракцией, точно такой же, как и введение декартовых и криволинейных систем координат.

Надо ясно представлять, что физические объекты, например скорость, не изменяются в любой системе координат, меняются только численные значения координат, но сам физический объект не изменяется. Назовем процесс перехода от прямолинейных евклидовых векторов к криволинейным топологическим векторам искривлением вектора.

Именно такой вектор, который является геодезической кривой, мы и называем топологическим вектором. В отличие от обычного евклидового вектора, который определяется как «направленный отрезок, характеризуемый длиной и направлением» [5, с. 9]. Разумеется, что этот отрезок прямой. Но известно, что прямая – это геодезическая линия евклидового пространства. Поэтому, мы ничуть не погрешим против истины, если определим направленный отрезок геодезической неевклидового пространства как неевклидовый вектор.

Повторим сказанное в [1], топологический вектор – это направленная линия, имеющая начало (в точке А) и конец (в точке В), являющаяся отрезком геодезической линии

39SAVN619
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

соответствующей геометрии. В частности, в евклидовом пространстве геодезическая линия, проходящая через две точки – это прямая. Соответственно, в евклидовом пространстве топологический вектор – это отрезок прямой от точки A до точки B, собственно, это обычный вектор, принятый в современной научной литературе.

В неевклидовых пространствах геодезическая линия не прямая, соответственно, топологический вектор будет не отрезком прямой, соединяющий точки A и B, а отрезком геодезической кривой, соединяющий те же точки.

Чтобы полнее раскрыть смысл применения топологических векторов, перейдем к рассмотрению неевклидовых векторных полей сил.

Как известно, в ньютоновской механике источником любого отклонения движения от равномерно прямолинейного движения являются силы. Это значит, что если материальная точка движется не прямолинейно или неравномерно, значит, на нее действуют сторонние силы. Причем векторное поле сил, действующих на материальную точку, будет полностью определять движение материальной точки в пространстве.

Надо различать свободное движение материальной точки и связанное движение или движение с ограничивающими связями. При свободном движении, материальная точка в принципе может оказаться в любой точке пространства. При наличии связей это не так. Материальная точка может оказаться только в тех точках, нахождение в которых допускается связями. Если траектория неопределенная, то нет никакого смысла переходить к топологическим векторам. Совсем другое дело, когда движение материальной точки либо ограничено связями, либо в силу других каких-то причин ограничено, либо в пределах линии, либо происходит в пределах определенной поверхности, то тогда имеет смысл сводить задачу к топологическим векторам.

Пример математического маятника

Например, движение математического маятника в поле гравитации ограничено связью нити, на которой подвешен груз. В результате, маятник качается вдоль отрезка круга, причем радиус орбиты маятника равен длине подвеса. Вводя топологические вектора вдоль кривой движения маятника можно упростить задачу. Покажем метод решения.

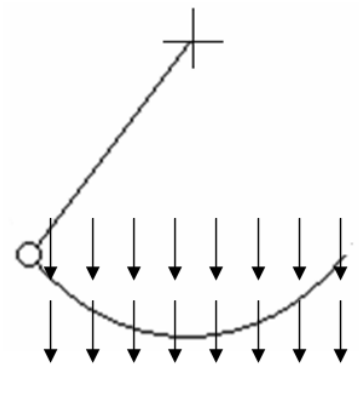

Рисунок 3. *Движение математического маятника в поле тяготения (рисунок авторов)*

Несмотря на то, что силы тяжести вертикальны, за счет ограничивающей связи маятник заметает сектор круга. Такое движение описывается как движение под действием равнодействующей силы, равной векторной сумме силы тяготения и силы натяжения нити (см. рисунок 4).

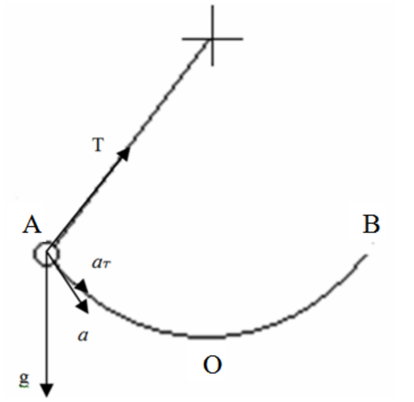

Рисунок 4. *Процесс перехода от евклидовых векторов к топологическим (g – сила тяжести, T – сила натяжения нити, a – равнодействующая сила возвращения маятника в нулевую точку (точку O), a_T – топологический вектор) (рисунок авторов)*

На рисунке 4 показан переход от евклидовых векторов в евклидовом пространстве к топологическим векторам в пространстве кривой *AOB*. На маятник действуют две силы: сила тяжести и противодействующая ей сила натяжения нити, в результате действия двух противоположных сил появляется равнодействующая возвращающая сила *a*, – вектор, касательный к траектории дуги *AOB* в одной точке.

Путем искривления евклидового вектора *a* получим топологический вектор a_T, имеющий длину, равную длине евклидового вектора *a*, и направление к нулевой точке O, но в отличие от евклидового вектора не просто касательный в одной точке к траектории движения, а полностью лежащий на линии траектории, в данном случае на дуге AOB.

Естественно, что возвращающая сила F_T будет иметь различные значения в каждой точке траектории, т. е. F_T будет функцией расстояния от нулевой точки, в которой $F_T = 0$. Вводя линейную координату *x*’, как расстояние вдоль кривой от начала в нулевой точке, можем записать:

$$F_T = \mathrm{F_T}(x'). \tag{1}$$

Т. о. задача движения маятника сводится к уравнению движения материальной точки вдоль линии AOB под действием инерции и возвращающей силы F_T.

Уравнение (1) аналогично уравнению Гука для сил упругости:

$$F_{упр} = k*x. \tag{2}$$

Принципиальное отличие движения маятника в том, что коэффициент в уравнении Гука *k* – постоянный, а в уравнении движения маятника $a_T(x')$ – функция координаты x'.

На рисунке 5 показана эпюра сил при движении маятника.

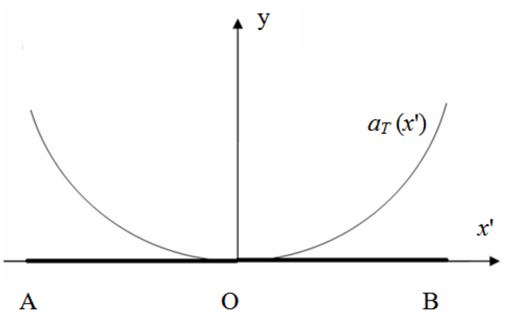

Рисунок 5. *Движение материальной точки маятника и эпюра возвращающей силы (рисунок авторов)*

39SAVN619
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Если известно уравнение функции возвращающей силы

$$a_T(x') = F(x'), \qquad (3)$$

то согласно уравнению (2) получим дифференциальное уравнение, решение которого и есть решение задачи движения математического маятника.

Значит, для решения задачи движения математического маятника необходимо в явном виде установить явный вид функции (4).

На рисунке 6 показан расклад сил для математического маятника.

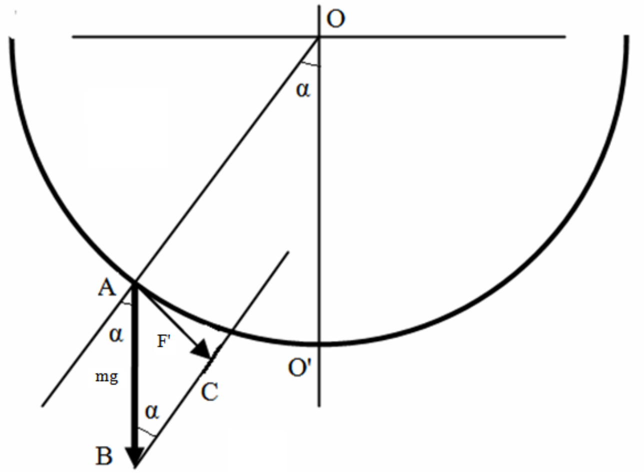

Рисунок 6. *Действующие на маятник силы (рисунок авторов)*

На рисунке 6 мы намеренно не показали нормальные силы, проекцию силы тяжести на направление нормали к траектории движения и силу натяжения маятника, компенсирующую эту силу. Эти силы, во-первых, компенсированы друг другом и перпендикулярны траектории движения. Поэтому не существенны для решения задачи движения маятника.

Т. о. движущей силой, которая напрямую влияет движение – это проекция силы тяжести mg на касательную в точке A. Величина этой проекции равна:

$$F' = mg*\sin\alpha. \qquad (4)$$

Три угла α равны между собой, как противолежащие углы при пересечении параллельных прямых.

С другой стороны, длина дуги O'A равна x', т. е.:

$$x' = \frac{\pi * \alpha * R}{180^0}. \qquad (5)$$

Здесь R – длина подвеса маятника.

Выразим α из (5) в явном виде:

$$\alpha = \frac{x' * 180^0}{\pi * R}. \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (4) получим выражение возвращающей силы математического маятника:

$$a_T(x') = F' = mg*\sin\left(\frac{x' * 180^0}{\pi * R}\right). \qquad (7)$$

39SAVN619
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Или в окончательном виде:

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = mg*\sin\left(\frac{x'*180^0}{\pi*R}\right). \tag{8}$$

Полученное уравнение – это дифференциальное уравнение второго порядка с одним неизвестным.

Уравнение (8) является трансцендентным, т. к. не имеет решения в элементарных функциях, что является явным недостатком данного решения, например по сравнению с решением, представленным в [6]. Несомненным преимуществом решения (8) является то, что оно дает мгновенные состояния маятника, в отличие от решения в [6], которое дает только интегральное значение периода колебаний.

Легко видеть, что метод топологических векторов позволяет решать не только задачу движения математического маятника, но и любые задачи движения материальной точки со связями вдоль любой кривой в поле внешних сил. В случае математического маятника траектория – это плоская кривая в плоскости XZ. Т. е. уравнение траектории представляет собой уравнение плоской кривой $S = f(x, z)$, т. е. зависит от двух координат.

Но и в случае пространственной кривой, когда уравнение зависит от трех координат $S = f(x, y, z)$, методом топологических векторов уравнение сводится к уравнению в зависимости от одной единственной координаты $S = f(x')$, где x' – длина пути вдоль кривой.

Повторим, что подобный метод может быть применен в единственном случае, если заранее известно уравнение траектории и внешнее поле сил.

Другими словами, движение материальной точки ограничено жесткими связями, ограничивающими любое движение, кроме движения вдоль заранее заданной траектории. При этом внешние силы никак не зависят от положения материальной точки в пространстве. При выполнении этих двух условий уравнение движения сводится к одномерному. Потому, что движение происходит в рамках заранее заданной линии, Такое возможно потому, что все внешние силы, которые стремятся сдвинуть материальную точку с заданной траектории, т. е. перпендикулярные линии траектории, компенсируются силами связи. Отметим, что при постановке задачи движения маятника особо отмечается, что маятник подвешен на нерастяжимой нити.

Именно из-за этого становится возможным описать движение точки строго вдоль линии, т. е. в зависимости от одной координаты x'. Этот момент является основным преимуществом метода.

Т. к. интересует не просто решение задачи движения вдоль траектории, а решение в обычном евклидовом пространстве, то после нахождения решения уравнения (8), перейдем к решению в евклидовом пространстве, имея на руках уравнения связи траектории в евклидовых координатах. Например, для движения математического маятника это уравнения (5) или (6), связывающие угол отклонения маятника α и расстояние вдоль траектории. В других случаях будем иметь другие, но аналогичные уравнения.

Пример сферического маятника

Перейдем к другому примеру, к движению сферического маятника. Несмотря на то, что траектория сферического маятника также является пространственной линией, но впрямую перейти к решению одномерной задачи не получится, т. к. заранее не известно уравнение траектории в пространстве. Поэтому решать задачу движения сферического маятника придется в два этапа. На первом этапе определим уравнение траектории в пространстве, и только на втором этапе, определим характер движения маятника вдоль траектории.

Оговоримся, что задача движения сферического маятника может считаться решенной, т. к. различные методы решения приведены в литературе [7–9]. Все известные решения сводятся к решению трансцендентных уравнений в эллиптических интегралах. Мы же предлагаем решение без применения эллиптических интегралов методом топологических векторов.

Во-первых, отметим, на основании чего становится возможным перейти к топологическим векторам. Это возможно потому, что как и обычный математический маятник, так и сферический имеют подвес в виде нерастяжимой нити. Т. е., сферический маятник также жестко ограничен в своем движении сферической поверхностью, радиус которой определяется длиной подвеса R.

На рисунке 7 показана траектория движения сферического маятника из учебника Н.Н. Бухгольца [8, с. 431].

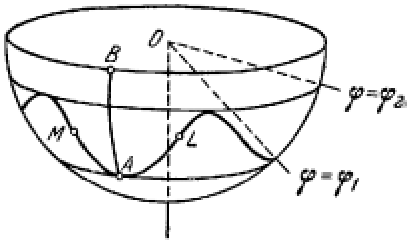

Рисунок 7. *Траектория движения сферического маятника (рисунок из [8, с. 431])*

Т. к. все движения сферического маятника происходит строго по поверхности сферы, то логично в рамках методики топологических векторов перейти от движения в трехмерном евклидовом пространстве к движению по сферической поверхности. Т. е., от трехмерного движения в пространстве перейти к двумерному движению на поверхности. Другими словами, от трехмерного движения к двумерному. Т. к. известно, что плоскость Римана или плоскость Лобачевского в евклидовом пространстве трехмерна, а в рамках собственной геометрии любая плоскость – двумерна.

Т. о. первое преимущество перехода к соответствующей неевклидовой геометрии – это сокращение количества координат, описывающих движение мат точки.

Но в рамках современной науки такой переход – это тришкин кафтан. Т. к. количество координат естественно сокращается, но возрастают сложности описания движения и соответственно усложняется решение динамических уравнений движения. Это и является главным препятствием широкого применения топологических подходов решения динамических задач.

Рассмотрим проблему. В чем главная сложность топологического подхода?

В применении для решения задачи проективной плоскости. Т. е., хотя движение точки происходит в неевклидовой плоскости, но решение, тем не менее, ищется в евклидовой «проективной» плоскости. Т. е. в процессе решения изменение координат в неевклидовой плоскости пересчитывается в евклидовые координаты на плоскости проекции [10–12].

Так как проецирование требует постоянных пересчетов координат от неевклидовых к евклидовым, и наоборот, то решение оказывается совсем не простым. Что само по себе уже представляет значительные сложности, тем более, что такие переходы оказываются неоправданными. Потому, что на самом деле все решения ищутся в евклидовом пространстве,

39SAVN619
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

а неевклидовые плоскости оказываются в роли вспомогательных средств визуализации, и никакого преимущества не дают, кроме наглядности.

Взамен общепринятой методики предлагается все решение вести в рамках неевклидовой плоскости и только после получения решения переходить к описанию движения в евклидовом пространстве, за счет наличия связи неевклидовых координат к евклидовыми.

Этот прием мы использовали выше при решении задачи движения математического маятника, когда сначала найдено решение движения материальной точки вдоль прямой линии (см. рисунок 5), можно назвать ее изображающей линией, и только после нахождения решения вдоль изображающей линии, за счет наличия связи между координатами вдоль этой линии и координатами евклидового пространства в виде (5) можно перенести полученное решение в евклидовое пространство.

Предлагаемое решение для сферического маятника будет не на много сложнее.

Предварительные сведения

Для начала введем некоторые необходимые определения.

1. Топологический радиус-вектор.

Радиус-вектором называется вектор, задающий положение любой точки движущего тела в заранее выбранной системе координат. Причем, по умолчанию, за выбранную систему координат принимают декартову систему координат, «а декартовы координаты точки x_A, y_A, z_A являются проекциями этого вектора на соответствующие координатные оси, однозначно определяющие как длину, так и направление этого радиус-вектора. Обычно радиус-вектор обозначают $\boldsymbol{r}$» [13, с. 21].

Приведенное определение радиус-вектора принято в евклидовом пространстве для евклидовых векторов. Причем, начало декартовых координат в евклидовом пространстве может быть выбрано произвольно в любой точке евклидового пространства. Также и радиус-вектор может быть проведен к любой точке бесконечного евклидового пространства.

Для ограниченного связями движения материальной точки, которая движется строго в пределах неевклидовой плоскости, это принципиально не так. В первую очередь, поверхность возможных траекторий движений точки со связями в общем случае является неевклидовой поверхностью. Отсюда следует, что точка начала координат может быть только в пределах неевклидовой плоскости возможных траекторий. Точно также, радиус-вектор может быть проведен не к любой точке, а только к точкам неевклидовой плоскости.

Более того, как уже сказано выше, предполагается введение топологических векторов, соответственно должно быть введено понятие топологического радиус-вектора. В соответствии с этим топологический радиус-вектор – это направленный отрезок геодезической кривой, соединяющий точки начала координат и выбранной точкой. На рисунке 8 показаны различия между евклидовым радиус-вектором и топологическим радиус-вектором.

На рисунке 8 показано, что евклидовый радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ проходит прямой линией от точки $\boldsymbol{O}$, принятой за начало координат, до точки $\boldsymbol{A}$. А топологический радиус-вектор $\boldsymbol{r_T}$, напротив, проходит по меридиану сферы, другими словами, $\boldsymbol{r}$ – прямолинейный, а $\boldsymbol{r_T}$ – криволинейный. Это происходит не случайно. Мы уже говорили, что вектор по общему определению – это направленный отрезок геодезической в рамках соответствующей геометрии.

39SAVN619
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

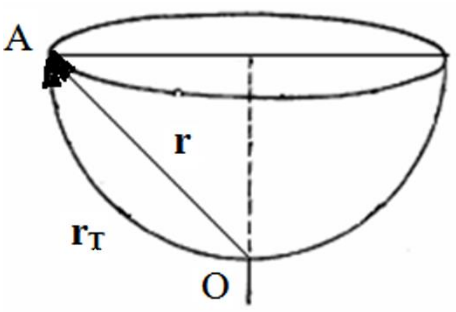

Рисунок 8. *Радиус-векторы для сферического маятника (**r** – евклидовый, **r**$_T$ – топологический) (рисунок авторов)*

Естественно, что геодезическая (кратчайшее расстояние) между точками ***O*** и ***A***, в евклидовой геометрии это прямая ***OA***, а сферической геометрии возможных траекторий сферического маятника – это отрезок меридиана ***OA***, т. к. точка O принята за начало сферических координат, т. е. полюс.

2. Потенциальное поле.

По определению потенциального поля: «полная работа силы на каком-либо перемещении точки равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках перемещения и не зависит от формы траектории, по которой оно совершается, если силовая функция является однозначной» [14, с. 344]. Заметим, что в цитате ничего не сказано, про то, в каком пространстве силовая функция является потенциальной. Более того далее сказано: «полная работа силы на каком-либо перемещении точки равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках перемещения и не зависит от формы траектории, по которой оно совершается» [14, с. 344]. Т. к. по определению, поле сил является потенциальным, если работа сил поля зависит только от силовой функции в начальной и конечной точках и не зависит от траектории, значит, нет никакой разницы движется материальная точка по определенной поверхности или по любой другой траектории. Это означает, что никаких специальных доказательств для случая движения по неевклидовой поверхности не требуется (см. рисунок 9).

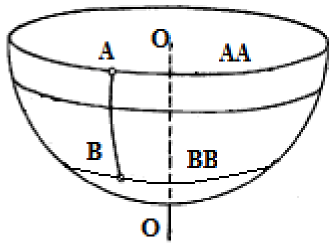

Рисунок 9. *Потенциальное поле на сферической поверхности (рисунок авторов)*

Совершенно ясно, при движении точки из точки A в точку B совершенно не важно, по какой траектории точка передвинулась из начальной в конечную точку. Более того, согласно определению, приведенному выше, силовая функция вдоль всего уровня AA и BB остается постоянной. Т. е., если точка перемещается от любой точки на уровне AA и переместится в любую точку на уровне BB, то работа по перемещению будет одинаковой.

3. Центральное поле.

Рассмотрим векторное поле возвращающих сил для сферического маятника. Легко видеть, что в каждом меридиональном сечении картинка будет полностью повторять рисунок 6 для математического маятника, потому, что если маятник качается в плоскости меридиана (любого), то он превращается в обычный математически (плоский) маятник. Т. е. в

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

меридианной плоскости поле сил тяжести, действующих строго вертикально вниз для маятника, не важно плоского или сферического, в поле возвращающих сил маятника (см. рисунок 10).

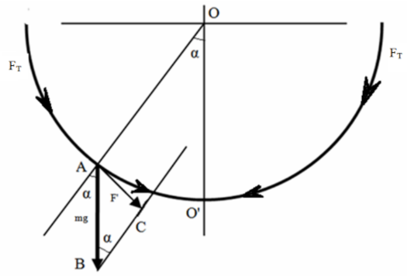

Рисунок 10. *Силы, действующие на маятник в меридианной плоскости (mg – сила тяжести, F' – проекция силы тяжести на касательную к траектории, F_T – топологический вектор возвращающей силы) (рисунок авторов)*

На рисунке 11 приведено изображение сферической поверхности и векторы возвращающей силы сверху.

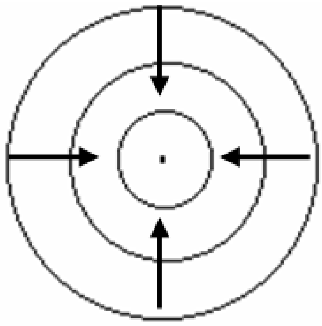

Рисунок 11. *Поверхность траекторий сферического маятника и направление сил, действующих на маятник при отсутствии орбитального движения (рисунок авторов)*

Из рисунка 10 явно видно, что, несмотря на то, что силы тяжести действуют вертикально вниз, тем не менее, возвращающие силы, которые действуют реально на сферический маятник – центральные, т. к. все траектории сходятся в одном центре – наинизшей точке сферического маятника.

Это утверждение следует из того, что говорилось ранее. Реально на движение связанной материальной точки определяется не тем, какие направления имеют реальные внешние силы, а только проекции на поверхность, на которой проходят все возможные траектории. Т. е., что на решение задачи реально влияют только тангенциальные проекции внешних сил, а все нормальные проекции компенсируются связями и на решение задачи определения движения влияния не имеют.

Поэтому, имеем право исключить из рассмотрения все нормальные проекции сил, и оперировать исключительно тангенциальными проекциями. А т. к. тангенциальные проекции касательны поверхности траекторий в каждой точке, то легко представить, что векторы тангенциальных сил искривляются от точки к точке в соответствии с кривизной поверхности траекторий.

Именно такие векторы, которые меняют свое направление от точки к точке в соответствии с искривлением поверхности траекторий, авторы статьи называют топологическими векторами. Для сферического маятника поверхность траекторий представляет собой поверхность сферы. В соответствии с указанными рассуждениями

39SAVN619
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

рассматриваются только векторы в пределах сферической поверхности или топологические векторы на сферической поверхности.

При этом ни в коем случае нельзя путать внешнее поле тяжести, действующей на сферический маятник, и векторное поле возвращающих сил, действующих на сферический маятник на поверхности возможных траекторий.

Векторы поля тяжести всюду вертикальные и параллельны оси OO (см. рисунок 8), а векторы возвращающих сил, действующих на тот же маятник, всюду принадлежат сферической поверхности. Поэтому поле возвращающих (топологических) векторов – центральное (см. рисунок 11), а поле сил тяжести – нет. Причем поле сил тяжести является осесимметричным полем.

4. Моменты сил.

Момент силы относительно точки.

Моментом силы относительно точки или крутящим моментом, называется вектор, равный векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы и вектора силы, т. е. $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F}]$. По определению векторного произведения вектор M перпендикулярен плоскости, в которой расположены и векторы r и F (см. рисунок 12).

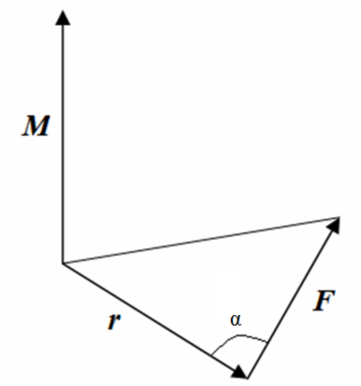

Рисунок 12. *Момент силы относительно точки (рисунок авторов)*

Модуль момента силы относительно точки равен $M = r*F*sin\alpha$, отсюда следует, что для центрального векторного поля сил момент относительно центра поля всегда равен нулю.

Согласно п. 3 векторное поле возвращающих сил для сферического маятника – центральное, значит, для векторного поля возвращающих сил момент возвращающих сил относительно центральной точки поля равен нулю. Центральной точкой поля возвращающих сил – это нижняя точка равновесия сферического маятника (см. рисунок 11). Значит, момент возвращающих сил относительно этой точки равен нулю.

5. Момент импульса или кинетический момент.

Кинетический момент определяет количество вращательного движения. Он равен векторному произведению импульса $\boldsymbol{p}$ (в любой точке), на радиус-вектор этой точки

$$\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}]. \quad (9)$$

6. Закон сохранения кинетического момента.

Согласно законам механики «если относительно некоторой точки ***O*** выбранной системы отсчета момент всех сил, действующих на частицу, равен нулю, то относительно этой точки момент импульса остается постоянным» [15, с. 134]. Для того, чтобы воспользоваться данным законом для случая сферического маятника, приведем вид данного закона в полярной форме.

39SAVN619
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Во-первых, введем полярную систему координат на сферической поверхности возможных траекторий сферического маятника (рисунок 13).

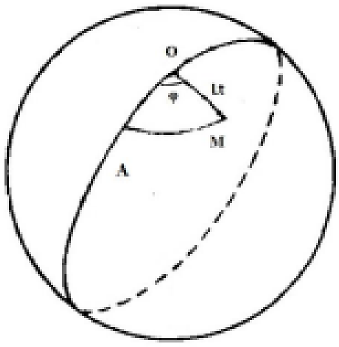

Рисунок 13. *Полярная система координат на сфере (рисунок авторов)*

Легко видеть, что в принципе, за полюс *O* можно принять любую точку на поверхности сферы, но для практических целей удобнее принять за полюс точку нижнего равновесия. В этом случае любая точка на поверхности сферы будет определяться координатами r и φ. Причем ничем, кроме локальности, такая система координат не будет отличаться от такой же полярной системы координат на евклидовой плоскости.

Рассмотрим в точке ***A*** с координатами $A(r, \varphi)$ два орта: e_r, направленный по радиус-вектору в сторону увеличения r, так что $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e_r}$, и перпендикулярный ему e_φ, направленный в сторону увеличения φ.

Дифференцируя r по dt, получим известное соотношение:

$$\frac{d\mathrm{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}e_r + r\frac{d\varphi}{dt}e_\varphi . \qquad (10)$$

Или в другой форме записи

$$\mathbf{r}' = r'e_r + r\varphi' e_\varphi . \qquad (11)$$

Кинетический момент равен:

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'] = [\boldsymbol{r}, r'\boldsymbol{e_r}] + [\boldsymbol{r}, r\varphi'\boldsymbol{e_\varphi}]. \qquad (12)$$

Первое слагаемое в правой части (12) равно нулю, как векторное произведение коллинеарных векторов. Тогда

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}, r\varphi'\boldsymbol{e_\varphi}] = [r\boldsymbol{e_r}, r\varphi'\boldsymbol{e_\varphi}] = r^2\varphi'[\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\varphi}]. \qquad (13)$$

Так как по закону сохранения кинетического момента величина M = const, окончательно получим

$$\boldsymbol{M} = r^2\varphi' = const \text{ [16, с. 34]}. \qquad (14)$$

Мы ввели векторное поле возвращающих сил сферического маятника как поле топологических векторов на сферической поверхности возможных траекторий сферического маятника. Это векторное поле центрально относительно нижней точки равновесия маятника. Т. к. относительно точки O поле возвращающих сил центральное, значит, относительно этой точки кинетический момент точки, движущейся в центральном поле возвращающих сил, остается постоянным.

Ничего подобного в обычном евклидовом пространстве, в котором на сферический маятник действует поле сил тяготения, доказать невозможно.

Покажем преимущество перехода от евклидового пространства к сферическому (неевклидовому) пространству для сферического маятника.

В современной литературе совершенно ошибочно считается, что теоремы, доказанные для евклидовой плоскости, могут быть отнесены только к евклидовой плоскости.

Например, на рисунке 13 показано ортогональная система координат *XУ* на поверхности цилиндра.

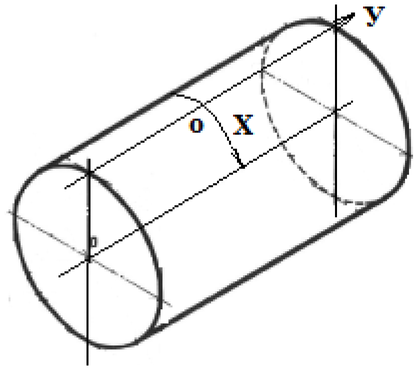

Рисунок 13. *Ортогональная система координат ХУ на поверхности цилиндра (рисунок авторов)*

При введении ортогональной системы координат на поверхности цилиндра любая точка на поверхности цилиндра будет определяться координатами (*x, y*). Отличить аналитически их от координат (x, y) на евклидовой плоскости невозможно.

От евклидовой плоскости плоскость поверхности цилиндра отличается только двумя свойствами: это плоскость цилиндра локальна, а евклидова плоскость – бесконечна. Второе свойство – это кривизна поверхности. У евклидовой плоскости она нулевая. Никаких других отличий между евклидовой и неевклидовой плоскостями не существует.

Покажем это на примере сферического маятника.

В литературе доказана теорема, которая состоит в том, что «При движении материальной точки единичной массы в центральном поле ее расстояние от центра поля меняется так, как *r* в одномерной задаче с потенциальной энергией:

$$V(r) = U(r) + \frac{M^2}{2r^2} \tag{15}$$

» [16, с. 35].

Приведем доказательство теоремы полностью.

Дифференцируя соотношение (11) найдем:

$$\boldsymbol{r}'' = (r'' - r(\varphi')^2)\boldsymbol{e_r} + (2r'\varphi' + r\varphi'')\boldsymbol{e_\varphi}. \tag{16}$$

Ввиду центральности поля

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r \,. \tag{17}$$

Поэтому уравнение движения в полярных координатах принимает вид:

$$\mathrm{r}'' + \mathrm{r}(\varphi')^2 = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \text{ и } 2*\mathrm{r}'\varphi' + \mathrm{r}\varphi'' = 0 \,. \tag{18}$$

Но по закону сохранения кинетического момента

39SAVN619
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

$$\varphi' = \frac{M}{r^2}, \tag{19}$$

где M – постоянная, зависящая от начальных условий. Поэтому

$$\text{r}'' = -\frac{\partial U}{\partial r} + r\frac{M^2}{r^4} \quad \text{или} \quad \text{r}'' = -\frac{\partial V}{\partial r}, \tag{20}$$

где

$$\text{V} = U + \frac{M^2}{2r^2}. \tag{21}$$

Величина $V(r)$ называется эффективной потенциальной энергией [16, с. 35].

Обсуждение полученных результатов

Можно сказать, что никаких ограничений по размерам области определения систем координат, а также никаких запретов на кривизну поверхностей в доказательства не представлено. Доказательства приводились специально подробно, чтобы данное утверждение было видно явно.

Отсюда следует главный вывод, что все теоремы и законы, доказанные в рамках классической аналитической механики, автоматически распространяются на любые неевклидовые поверхности. За исключением тех редких случаев, когда в процессе доказательства явно учитываются размеры пространства либо кривизна поверхности.

Суммируя вышесказанное, можно заявить, что сферический маятник будет двигаться по сферической поверхности в поле топологических векторов возвращающих сил, точно также как движется материальная точка в поле центральных сил в задаче Кеплера. Т. е. сферический маятник будет двигаться по эллипсу. Нужно помнить, что сферический маятник будет описывать эллипс не на евклидовой плоскости, а на сферической поверхности.

Для того, чтобы получить решение задачи движения сферического маятника в евклидовом пространстве нужно всего лишь перевести сферические координаты в евклидовые.

Этот процесс перевода неевклидовых координат в евклидовые хорошо и подробно описан в курсах дифференциальной геометрии, например, [17]. Если окажется, что поверхность возможных траекторий материальной точки со связями, например, сферическая, как это случилось со сферическим маятником, то есть соответствующие курсы по сферической геометрии, например, [18]. Есть соответствующие курсы по геометрии Римана и Лобачевского.

Т. е. перевести траектории движения материальной точки из неевклидовой плоскости в трехмерное евклидовое пространство не представляет особых сложностей и это хорошо описано в современной научной и учебной литературе.

Сформулируем главное преимущество метода топологических векторов для задач движения материальной точки с ограничивающими связями.

Главное преимущество состоит в том, что если в евклидовом пространстве движение всегда трехмерно, то в неевклидовом пространстве это движение, как максимум двумерно. Причем, если траектория движения материальной точки известна заранее, то задача сводится к одномерному движению вдоль неевклидовой линии, т. е. движение одномерно.

Кроме этого, все законы и теоремы аналитической механики на плоскости (евклидовой) автоматически распространяются на все неевклидовые поверхности. Так, для движения сферического маятника выше показано, что закон сохранения кинетического момента и теорема о движении в центральном поле позволяют свести задачу движения сферического маятника к одномерной задаче движения точки в потенциальном поле с эффективной потенциальной энергией. Т. е. свести решение к задаче Кеплера.

Вывод

Данная задача легко решается в элементарных функциях и служит эффективной заменой решения в эллиптических интегралах, коими сейчас предлагается решать задачу сферического маятника в современной научной и учебной литературе, как единственно возможное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочетков А.В., Федотов П.В. Новые методические подходы решения сферического маятника в элементарных функциях. Введение в топологическую механику // Вестник Евразийской науки. 2019. № 2.
2. Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. – М.: Наука, 1990. – 215 с.
3. Анчиков А.М. Основы векторного и тензорного анализа. – Казань. Казанский университет, 1988. – 138 с.
4. Гордиенко А.Б., Золотарев М.Л., Кравченко Н.Г. Основы векторного и тензорного анализа: учебное пособие. – Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2009. – 133 с.
5. Речкалов В.Г. Векторная и тензорная алгебра. – Челябинск: ИИУМЦ «Образование», 2008. – 140 с.
6. Кочетков А.В., Челпанов И.Б., Федотов П.В. Определение периода больших колебаний маятника в элементарных функциях // Измерительная техника. 2016. № 6. – С. 39.
7. Аппель П. Теоретическая механика. Статика. Динамика точки. Т. 1. – М.: Физматгиз, 1960. – 515 с.
8. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. – М.: Наука, 1965. – 468 с.
9. Валле-Пуссен. Лекции по теоретической механике. Т. 1. – М.: ИЛ, 1948. – 339 с.
10. Асеев А. Евклидова и неевклидова геометрия. URL: https://studfiles.net/preview/4251701/page:3/ (дата обращения: 16.04.2019).
11. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: МГУ, 1980. – 439 с.
12. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1974. – 176 с.
13. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курс общей физики. В 2 т. Т. 1 Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / Под ред. А.С. Кингсепа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 560 с.
14. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1990 – 607 с.
15. Иродов И.Е. Основные законы механики. – М.: Высш. шк., 1985. – 248 с.
16. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
17. Шарипов Р.А. Курс дифференциальной геометрии. – Уфа, 1996. – 211 с.
18. Кранц П. Сферическая геометрия. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 96 с.

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Kochetkov Andrey Viktorovich
Perm national research polytechnical university, Perm, Russia
E-mail: soni.81@mail.ru

Fedotov Petr Viktorovich
Interregional public organization «Professional engineer», Moscow, Russia
E-mail: klk50@mail.ru

Solution of the problem of motion of a spherical pendulum by the method of topological vectors

Abstract. It is shown that the concept of topological vectors introduced in the first article means a generalization of the concept of Euclidean vectors accepted in modern scientific and educational literature.

The essence of the method of topological vectors consists in the transition from a three-dimensional Euclidean space to a non-Euclidean plane. The basic principle of this transition is that the real vectors of external forces acting in Euclidean space are replaced by topological vectors acting in the non-Euclidean plane.

It is shown that such a transition in many cases makes it possible to simplify the solution of complex problems. In particular, it is shown that the method of topological vectors instead of the proposed in modern literature as the only solution to the problem of motion of a spherical pendulum in the form of elliptic integrals, the article provides a solution in the form of solving the Kepler problem for the orbital motion of a material point. This problem is easily solved in elementary functions and serves as an effective substitute for the solution in elliptic integrals, which are now proposed to solve the problem of the spherical pendulum in modern scientific and educational literature, as the only possible solution. Similarly, it is possible to solve numerous problems of motion of bodies in complex conditions, greatly simplifying the solution itself and the methods of achieving it.

The main advantage of the method of topological vectors for problems of motion of a material point with limiting connections is that if in Euclidean space the motion is always three-dimensional, then in non-Euclidean space this motion is at most two-dimensional. Moreover, if the trajectory of a material point is known in advance, the problem is reduced to one-dimensional motion along a non-Euclidean line, i.e. the motion is one-dimensional.

Keywords: spherical pendulum; elementary functions; vectors in mathematics and physics; topological vectors; topological mechanics; court; fort

39SAVN619
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com