Вестник Евразийской науки / The Eurasian Scientific Journal https://esj.today

2019, №5, Том 11 / 2019, No 5, Vol 11 https://esj.today/issue-5-2019.html

URL статьи: https://esj.today/PDF/41SAVN519.pdf

Ссылка для цитирования этой статьи:
Голова Т.А., Андреева Н.В. Анализ методов расчета слоистых пластин и оболочек для расчета многослойных конструкций // Вестник Евразийской науки, 2019 №5, https://esj.today/PDF/41SAVN519.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

For citation:
Golova T.A., Andreeva N.V. (2019). Analysis of methods of calculation of layered plates and shells for the calculation of multilayer structures. *The Eurasian Scientific Journal*, [online] 5(11). Available at: https://esj.today/PDF/41SAVN519.pdf (in Russian)

УДК 692

ГРНТИ 67.11.41

Голова Татьяна Александровна
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «Московский инженерно-физический институт»
Балаковский инженерно-технологический институт (филиал), Балаково, Россия
Заведующий кафедрой «Промышленное и гражданское строительство»
Кандидат технических наук
E-mail: emelyanova-tanya@mail.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=214652

Андреева Наталья Викторовна
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «Московский инженерно-физический институт»
Балаковский инженерно-технологический институт (филиал), Балаково, Россия
Ассистент кафедры «Промышленное и гражданское строительство»
E-mail: andreevane@list.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=704487

Анализ методов расчета слоистых пластин и оболочек для расчета многослойных конструкций

Аннотация. В статье затрагивается вопрос расчета многослойных конструкций по типу слоистых пластин и оболочек. Авторами проведен анализ существующих подходов в области расчета слоистых пластин и оболочек. Целью исследований является определение существующих методик расчета для многослойных конструкции, описание основных критериев расчета и влияние структуры пластин и оболочек на работу конструкции в целом. Авторами установлено, что расчет многослойных конструкций рассматривается с помощью двух основных методик: теории упругости и методами механики композитных материала. Представлены основные зависимости, описывающие напряженно-деформационное состояние слоистых пластин и оболочек методами теории упругости и механики композитов Изотропная, анизотропная и ортотропная структуры пластин и оболочек учитывается законом Гука. Выбор методики расчета зависит от состава многослойной конструкции, жесткости среднего слоя и разноориентированности всех слоёв. Исследования напряженно-деформированного состояния и распределения усилий между компонентами многослойных конструкций, в приведенных расчетах показывают, что в основном деформационное стояние описывается обобщённым законом Гука, при этом важным фактором является учет общей анизотропии конструкции и работы среднего слоя в слоистой конструкции.

Ключевые слова: слоистые пластины и оболочки; многослойные конструкции; теория упругости; механика композитных материалов

Введение

В рамках реализации Государственной программы Российской Федерации «Энергосбережение и повышение энергетической эффективности на период до 2020 года» одним из часто применяемых конструктивных решений для возведения и реконструкции зданий является использование многослойных элементов. Классические методики расчета таких конструкций часто направлены на определение несущей способности только одного слоя, выполненного из железобетона или кирпича. Однако, различные конструктивные решения многослойных элементов рассматривают возможность влияния слоя утеплителя на несущую способность конструкции в целом. При этом слой утеплителя может быть как внутренним, так и внешним. На сегодняшний день вопрос расчета многослойных конструкций актуален, так как в рамках повышения энергосбережения зданий такие элементы используется как в вертикальных, так и горизонтальных конструкциях.

Основой расчета многослойных конструкций являются отечественные разработки по теории слоистых пластинок и оболочек, которые относятся к концу 40-х годов (С.А. Амбарцумян, А.П. Прусаков) [1; 2]. В этих и многих последующих работах за основу построения расчетных соотношений была принята система гипотез Кирхгофа-Лява для целого пакета, которые при соответствующих допущениях позволяют свести трехмерную задачу деформирования оболочки к двухмерной. При этом деформации, а, следовательно, и напряжения, по толщине оболочки изменяются линейно.

Важным фактором при расчете многослойных элементов является сама структура пластин и оболочек. Она делится на изотропную, анизотропную и ортотропную.

В области теории расчет многослойных анизотропных оболочек многие вопросы остаются открытыми, так как расчёт их сводится к известным зависимостям из теории однородных изотропных оболочек. Упругие коэффициенты изотропного и анизотропного тела редко различаются по порядку. В этом случае основные уравнения оболочки, имеющей изотропные свойства в плоскости слоя и анизотропные по толщине, отличают от уравнений изотропной оболочки только другим коэффициентом поперечного сдвига; основные уравнения ортотропной оболочки сохраняют такую же структуру, но вместо двух появляется шесть упругих постоянных. Тогда получается, что при анизотропии с одной плоскостью симметрии структура основных уравнений изотропной и анизотропной оболочек уже отличается друг от друга. Поэтому большинство результатов по анизотропной деформации относится к ортотропным оболочкам, при этом предполагается, что главные направления ортотропии совпадают с линиями кривизны срединной поверхности оболочки.

В методиках расчета многослойных элементов, типа пластин и оболочек, рассматривают два подхода к расчету: с точки зрения теории упругости и механики композитных материалов.

Расчет многослойных пластин и оболочек методами теории упругости

Наиболее известным подходом при расчете многослойных конструкций является применение классической линейной теории упругости, которая рассматривает обычно изотропное тело, упругие свойства которого одинаковы по всем направлениям [3]. В этом случае при одноосном растяжении или сжатии независимо от направления закон Гука, связывающий напряжения и деформации, имеет известный вид:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma,$$

отсюда $\sigma = E\varepsilon$, где σ – нормальное напряжение; ε – соответствующее ему относительное удлинение; E – модуль упругости материала.

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Обобщенный закон Гука для анизотропного тела представлен таким образом, что в каждой точке тела компоненты ε_{ij} тензора деформаций являются однородными линейными функциями компонент σ_{ij} тензора напряжений:

$$\{\varepsilon_{ij}\} = [S_{ij}]\{\sigma_{ij}\} \text{ или } \{\sigma_{ij}\} = [C_{ij}]\{\varepsilon_{ij}\},$$

где S_{ij} и C_{ij} – константы податливости и жесткости тела.

Для ортотропного тела число независимых коэффициентов, характеризующих упругие свойства, равно девяти. Закон Гука для ортотропного тела записывается при совмещении координатных плоскостей с плоскостями упругой симметрии. При этом число независимых коэффициентов сохраняется равным девяти, поскольку вследствие симметрии матрицы коэффициентов податливости выполняются равенства:

$$E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12};\ E_2\nu_{32} = E_3\nu_{23};\ E_3\nu_{13} = E_1\nu_{31}.$$

Следует, что $\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} = \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$

При этом E_1, E_2, E_3 – модули упругости в соответствующем направлении; $\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}$ – коэффициенты Пуассона. Первый индекс указывает направление действующего напряжения, а второй – направление возникающей при этом поперечной деформации [4].

Общие вопросы прочности и устойчивости трехслойных пластин рассматривались в работах Л.М. Куршина, А.Я. Александрова, Л.Э. Брюкнера, Э.И. Григолюка, П.П. Чулкова, Король Е.А., Кобелев В.Н., Штамм К., Витте Г. [5–9]. При построении геометрически нелинейной теории трехслойных оболочек симметричной структуры принято использовать две гипотезы: для среднего слоя – гипотезы Тимошенко, а для внешних слоев – гипотезы Кирхгофа-Лява.

Недостатки использования теории Кирхгофа-Лява для расчета трехслойных пластин заключались в некоторой несогласованности исходных гипотез: при определении деформации по толщине оболочки предполагалось, что поперечный сдвиг равен нулю, но в условиях равновесия сохраняются поперечные силы; при определении деформации по толщине оболочки предполагалось, что длины отрезков на нормали к срединной поверхности в процессе деформации не изменяются, но в соотношениях упругости принимается $\varepsilon_{zz} = 0$. Данная несогласованность легко устранима, если использовать математической подход в виде интерполяции. Исключение представляют напряженные состояния в многослойных оболочках с мягким заполнителем, где необходимо учитывать поперечный сдвиг.

Практические приложения нелинейной теории слоистых пластин и оболочек основывались на упрощенном варианте нелинейных соотношений, которые известны под названием системы уравнений типа Кармана. На это указывают работы А.С. Вольмира, Х.М. Муштари и К.З. Галимова, М.С. Корнишина, В.И. Феодосьева, А.Ю. Биркгана, Гениева Г.А. [10–14]. Полученные зависимости были оптимизированы с помощью вариационных задач.

Вариационные задачи деформирования многослойных оболочечных конструкций строились на основе исходных гипотез с применением формальных математических приемов, которые позволяют избежать трудоемкого этапа составления уравнений равновесия статическим методом и приближенно сводят трехмерную задачу теории упругости к одномерной или двумерной задаче. Соответствующие разрешающие уравнения и граничные условия строго соответствуют исходным допущениям. Кроме того, вариационные формулировки являются основой для эффективных приближенных методов расчета, которые позволяют получить на выбранном классе аппроксимирующих функций наиболее эффективные приближенные решения.

Описание расчета и исследование деформативно-прочностными характеристик многокомпонентных многослойных конструкций, которые представляют собой основу многих многослойных конструкций приведено в работах Бондаренко, Шагина, Брусенцова Г.Н., Зайцева Ю.В. [15–17]. Простейшей двухкомпонентной конструкцией является армированный бетон.

Конструкционные строительные материалы (бетон, железобетон, кирпич) при одноосном кратковременном (условно-мгновенном) приложении нагрузки деформируются нелинейно. Разделение материалов на упругие и упругопластические условно связано с требованиями точности инженерных расчетов, характером регламентируемых предельных состояний. Таким образом, при строгом подходе диаграммы деформирования материалов, применяемых в многокомпонентных конструкциях, должны описываться нелинейными уравнениями. Учитывая характер диаграмм деформирования различных материалов и предложений по их аполитическому описанию целесообразно использование в расчетах уравнения, связывающего деформации и напряжения в форме, предложенной П.И. Васильевым, С.Е. Фрайфельдом и М. Бондаренко [18; 19]:

$$\varepsilon_M = \sigma\left[1 + \eta_K \left(\frac{\sigma}{R_{Kt}}\right)^{m_K}\right] / E_{Kt}^0,$$

$\varepsilon_м$ – условно-мгновенные относительные деформации материала; σ – действующие нормальные напряжения; $R_{кt}$ – пределы кратковременной прочности материалов в расчетный момент времени t; $E_{кt}^0$ – начальный модуль деформаций материала в возрасте t, $m_к$ – параметры нелинейности кратковременного деформирования материала.

Известно, что деформативно-прочностные показатели бетона увеличиваются со временем, а нагружение на здание осуществляется в первый период эксплуатации. Это обусловливает необходимость учета указанного фактора в значениях прочности бетона R и начального модуля деформации E_b^0. Увеличение прочности бетона с возрастом может быть учтено с помощью по зависимости Б.Г. Скрамтаева. [20]:

$$R_t = R_{28} \frac{\lg t}{\lg 28},$$

где R_{28} – прочность бетона в возрасте 28 сут; t – возраст бетона.

При этом начальный модуль деформаций бетона определяется по зависимости Н.Х. Арутюняна [21]:

$$E_b^0 = (1 - \beta\, e^{-at}) E_b^0\,(\infty),$$

где E (∞) – начальный модуль деформаций старого бетона в момент полной стабилизации его механических свойств, β , α – константы материала, определяемые из опыта (α = 0,02...0,4; β = 0,4...0,95).

В настоящее время для решения задач нелинейной теории слоистых пластин и оболочек используются компьютерные технологии [22], так как большое количество предложенных вариантов интегрированных уравнений в исключительных случаях удовлетворяют всем необходимым требованиям

Расчет многослойных пластин и оболочек методами механики композитных материалов

Для расчета и учета совместной работы макроскопических характеристик многослойной конструкции применяют еще один известную методику – механику композитов [23; 24].

В современной механике композиционных материалов существуют два основных подхода к оценке их механических свойств – структурный (микромеханика) и феноменологический (макромеханика). Микромеханика устанавливает связь между механическими характеристиками композиционного материала и свойствами составляющих его компонентов, их объемным содержанием, формой, структурой, характером взаимодействия, анализирует процессы образования и развития трещин, где существует зона существенного нелинейного деформирования, и других дефектов, изучает механизм передачи и перераспределения усилий между наполнителем и связующим. Однако такой подход используется редко из-за получения большого количества зависимостей.

Второе направление в механике композитов основывается на феноменологическом подходе, полагающем композит сплошной, макроскопической однородной средой. Принимается, что размеры наполнителя малы по сравнению с геометрическими параметрами самих конструкций, а возникающие поля напряжений и деформаций являются сглаженными. Это позволяет оперировать в расчетах общепринятыми интегральными характеристиками (средними напряжениями, деформациями), получаемыми в испытаниях образцов из композиционного материала.

Механика композитов рассматривает многослойные конструкции поэлементно, учитывая одно- и разнонаправленность материала.

При определении упругих характеристик однонаправленного материала необходимо ограничиться рассмотрением одной из простейших его моделей. Тогда для однонаправленного материала в виде пластины, состоящей из чередующихся слоев, обладающих свойствами волокон или матрицы (рис. 1) принимается, что объемная доля «волокна» в модельном материале равна его объемной доле в реальном композите. При этом связь волокон и связующего идеальна, волокно и матрица линейно упруги.

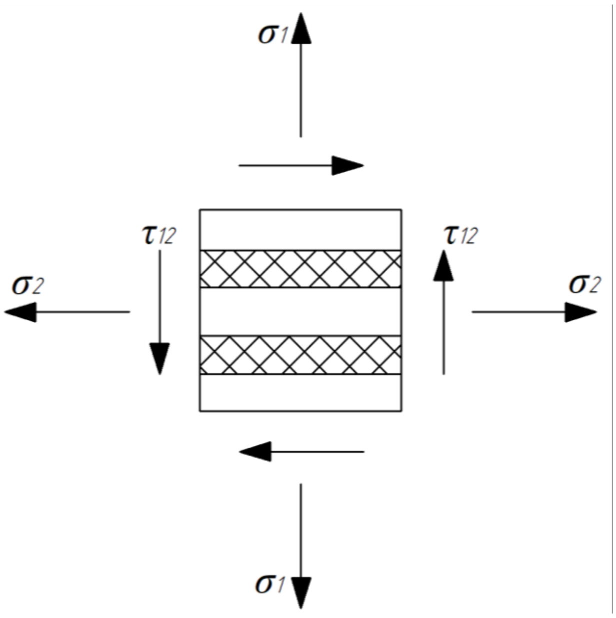

Рисунок 1. *Однонаправленный материал [4. Алфутов Н.А. и др. Расчет многослойных пластин и оболочек композиционных материалов, стр. 15, рис. 1.3] https://books.google.ru/books?id=sqL6AgAAQBAJ&pg=PA23&lpg=PA23&dq#v=onepage&q&f=false (рисунок переработан авторами)*

В принятой модели материала выполняются следующие условия равновесия и совместности деформаций [4]:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_{1B} = \varepsilon_{1M;} \\ \sigma_2 = \sigma_{2B} = \sigma_{2M} \\ \tau_{12} = \tau_{12B} = \tau_{12M.} \end{cases}$$

Полученные соотношения отражают известное «правило смесей»: вклад компонента пропорционален его объемной доле. Тогда закон Гука для волокна и матрицы, учитывая принятые допущение, что оба компонента изотропны будет иметь вид:

$$\varepsilon_{1B} = \frac{1}{E_B}(\sigma_{1B} - \nu_B\sigma_{2B});\ \varepsilon_{2B} = \frac{1}{E_B}(\sigma_{2B} - \nu_B\sigma_{1B});\ \gamma_{12} = \frac{1}{G_B}\tau_{12B}.$$

Если композит образован несколькими разноориентированными слоями однонаправленного материала при плоском напряженном состоянии (рис. 2), то среднее значение коэффициентов жесткости многослойных материалов, составленных из слоев однонаправленного материала, не зависят от структуры пакета слоев и полностью определяются свойствами однонаправленного материала [4].

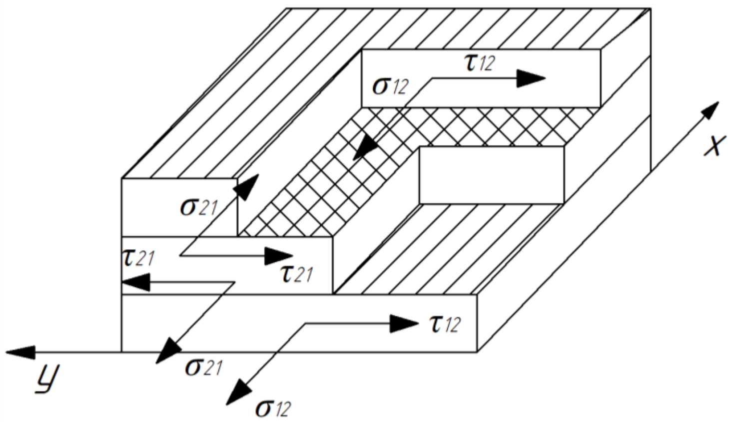

Рисунок 2. *Композит, образованный несколькими разноориентированными слоями однонаправленного материала [4. Алфутов Н.А. и др. Расчет многослойных пластин и оболочек композиционных материалов, стр. 23, рис. 1.6]* *https://books.google.ru/books?id=sqL6AgAAQBAJ&pg=PA23&lpg=PA23&dq#v=onepage&q&f=false* *(рисунок переработан авторами)*

При напряженно-деформационном состоянии в виде изгибе многослойных композитов (рис. 3) принимается допущение, что слои материала идеально связаны между собой, при этом отсутствует проскальзывание слоев друг относительно друга. Классическая теория пластин, основанная на гипотезах Кирхгофа-Лява, приводит следующие выражения для деформаций [4]:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = e_x + z x_x \\ \varepsilon_y = e_y + z x_y \\ \gamma_{xy} = e_{xy} + z x_{xy.} \end{cases}$$

где z – расстояние от некоторой координатной, отсчётной, плоскости, за которую может быть принята любая плоскость, параллельная границам слоёв многослойного материала; $\{\varepsilon_x\}$,$\{\varepsilon_y\}$ – матрица-столбец деформаций отсчётной плоскости; $\{\gamma_{xy}\}$ – матрица-столбец изменений кривизны пластины.

Для многослойных конструкций наиболее эффективно использовать структурно-феноменологический подход. Феноменологический подход используется для описания поведения однонаправленного материала, а структурный – для рассмотрения многослойного материала, составленного из разноориентированных монослоёв Основные достоинства этого подхода – наглядность и минимальный объем исходной информации о свойствах материала.

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Описанный подход может быть применен для анализа процессов деформирования и разрушения многослойных композитов, составленных из нескольких разноориентированных монослоев. Для расчета таких конструкций применяют теория слоистых сред, позволяющая осуществлять переход от напряжений и деформаций композита к напряжениям и деформациям в любом его слое.

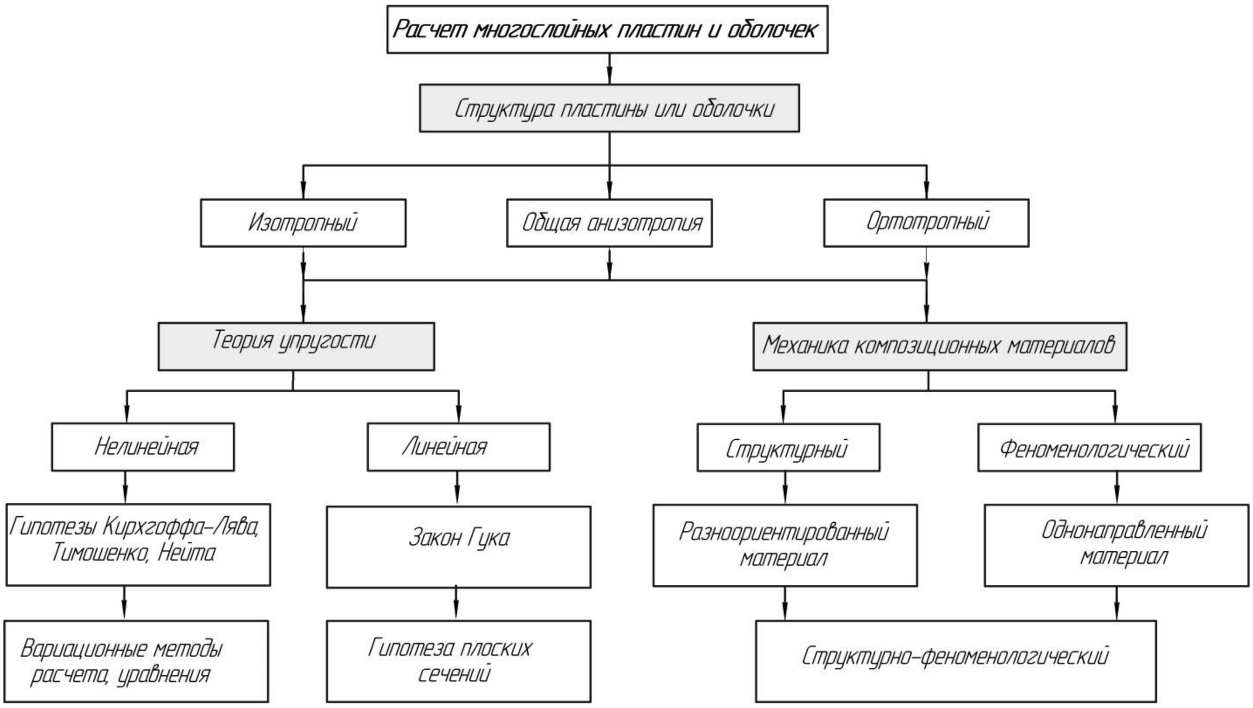

Рисунок 3. *Схема расчета слоистых пластин и оболочек для многослойных конструкций (разработано авторами)*

Заключение

Анализ существующих методик расчета для многослойных конструкций, проведенный авторами, показал его многозадачность, которая учитывает взаимосвязь между структурой материала, характеристиками его композиции, а также возможность применения методик расчета, основанных на теории упругости или механики композиционных материалов (рис. 1).

Выбор методики расчета зависит от состава многослойной конструкции, жесткости среднего слоя и многокомпонентности всех слоёв. Исследования напряженно-деформированного состояния и распределения усилий между компонентами многослойных конструкций в приведенных расчетах показывают, что в основном деформационное стояние описывается обобщённым законом Гука, однако важным фактором является учет общей анизотропии конструкции и работы среднего слоя. Однако данные методики являются достаточно трудоемкими для расчета многослойных конструкций и часто приводят к тому, что в расчете участвуют только несущие слои, поэтому в настоящее время многокомпонентность параметров учитывается методами компьютерного моделирования и различными программными комплексами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотроптных пластинок. – М.: Физматгиз, 1967. – 266 с.

2. Прусаков А.П. «Некоторые задачи изгиба круглых трехслойных пластин с легким заполнителем»: тр. конф. по теор. пластин и оболочек. – Казань: Казанский гос. ун-т, 1961. – С. 293–297.
3. Безухов Н.И., Лужин О.В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. – М.: Высш. школа, 1974. – 200 с.
4. Алфутов Н.А. и др. Расчет многослойных пластин и оболочек композиционных материалов / Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. // – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
5. Александров А.Я., Куршин Л.М. Трехслойные пластинки и оболочки. Прочность, устойчивость, колебания. Том 2. – М.: Машиностроение, 1968.
6. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. – М.: Машиностроение, 1973. – 170 с.
7. Кобелев В.Н., Коварский Л.М., Тимофеев С.И. Расчет трехслойных конструкций: Справочник. – М.: Машиностроение, 1984. – 304 с.
8. Король Е.А. Трехслойные ограждающие железобетонные конструкции из легких бетонов и особенности их расчета. Монография. – М.: АСВ, 2001. – 255 с.
9. Штамм К., Витте Г. Многослойные конструкции. Пер. с нем. Т.Н. Орешкиной / Под ред. С.С. Кармилова // – М.: Стройиздат, 1983. – 300 с.
10. Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки. М.: Гостехтеориздат, 1956. – 419 с.
11. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. – 432 с.
12. В.И. Феодосьев. Сопротивлением материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана,1999. – 590 с.
13. Биркган А.Ю., Вольмир А.С. Исследование динамической устойчивости пластинок с помощью электронных цифровых машин: докл. АН СССР, 1960. – С. 1083–1085.
14. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. – М.: Стройиздат, 1974. – 316 с.
15. Бондаренко А.М., Шагин П.Л. Расчет эффективных многокомпонетных конструкций. – М.: Строиздат, 1987. – 175 с.
16. Брусенцов Г.Н. К вопросу о реализации деформационной теории пластичности бетона в перемещениях / Строительная механика и расчет сооружений // – М.: 1979. – С. 20–23.
17. Зайцев Ю.В. Исследование перераспределения усилий в неразрезных железобетонных балках. Дис. канд. техн. наук. – М.: НИИЖБ, 1960. – 141 с.
18. Васильев П.И. Нелинейные деформации ползучести бетона / П.И. Васильев // Изв. ВНИИГ,1971, т.95. – С. 59–69.
19. Фрайфельд С.Е. Об исходных предпосылках уравнений механического состояния реальных материалов / С.Е. Фрайфельд // Тр. ХИСИ, 1955, вып.4.
20. Скрамтаев Б.Г. Строительные материалы (ред.). – М.: Государственное издательство литературы по строительным материалам, 1954. – 643 с.
21. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. – М., Л.: Гостехтеориздат, 1952. – 327 с.
22. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с. 2.
23. Седов Л.И. Механика деформируемого твердого тела. Том 3. – М.: Наука, 1972. – 568 с.
24. Шунгский Б.Е., Минаев В.Ф. и др. Расчет физико-механических свойств полимерных сотовых заполнителей и проектирование строительных конструкций на их основе. Учебное пособие. – Петрозаводск, 1983.

Golova Tatyana Aleksandrovna
National research nuclear university (Moscow engineering physics institute)
Balakovo engineering and technology institute (branch), Balakovo, Russia
E-mail: emelyanova-tanya@mail.ru

Andreeva Natalya Viktorovna
National research nuclear university (Moscow engineering physics institute)
Balakovo engineering and technology institute (branch), Balakovo, Russia
E-mail: andreevane@list.ru

Analysis of methods of calculation of layered plates and shells for the calculation of multilayer structures

Abstract. The article deals with the calculation of multilayer structures by the type of layered plates and shells. The authors analyze the existing approaches in the field of calculation of layered plates and shells. The aim of the research is to determine the existing methods of calculation for multilayer structures, describe the main criteria for calculation and the influence of the structure of plates and shells on the work of the structure as a whole. The authors found that the calculation of multilayer structures is considered using two main methods: the theory of elasticity and the methods of mechanics of composite materials. The main dependences describing the stress-strain state of layered plates and shells by the methods of the theory of elasticity and mechanics of composites are presented. Isotropic, anisotropic and orthotropic structures of plates and shells are taken into account by Hooke's law. The choice of the calculation method depends on the composition of the multilayer construction, the rigidity of the middle layer and the different orientation of all layers. Studies of the stress-strain state and the distribution of forces between the components of multilayer structures in the calculations show that the deformation state is mainly described by the generalized Hooke law, while an important factor is to take into account the overall anisotropy of the structure and the work of the middle layer in the layered structure.

Keywords: layered plates and shells; multilayer structures; theory of elasticity; mechanics of composite materials

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com