Вестник Евразийской науки / The Eurasian Scientific Journal https://esj.today

2019, №2, Том 11 / 2019, No 2, Vol 11 https://esj.today/issue-2-2019.html

URL статьи: https://esj.today/PDF/46SAVN219.pdf

Ссылка для цитирования этой статьи:
Кочетков А.В., Федотов П.В. Новые методические подходы решения сферического маятника в элементарных функциях. Введение в топологическую механику // Вестник Евразийской науки, 2019 №2, https://esj.today/PDF/46SAVN219.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

For citation:
Kochetkov A.V., Fedotov P.V. (2019). New methodical approaches of the solution of the spherical pendulum in elementary functions. Introduction to topological mechanics. *The Eurasian Scientific Journal*, [online] 2(11). Available at: https://esj.today/PDF/46SAVN219.pdf (in Russian)

УДК 531.53

Кочетков Андрей Викторович
ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Пермь, Россия
Профессор
Доктор технических наук, профессор
E-mail: soni.81@mail.ru

Федотов Петр Викторович
МОО «Профессиональный инженер», Москва, Россия
Эксперт
E-mail: klk50@mail.ru

Новые методические подходы решения сферического маятника в элементарных функциях. Введение в топологическую механику

Аннотация. Впервые в элементарных функциях аналитически точно получено решение сферического маятника. Для получения решения в элементарных функциях разработаны основы векторной алгебры и векторного анализа топологических векторов неевклидовой геометрии. Также показано, что для любой физической задачи, которая не имеет элементарного решения в рамках векторов евклидовой геометрии, может быть подобрана соответствующая неевклидовая плоскость, для которой могут быть введены топологические векторы. Также показано, что введение понятия топологических векторов (кортов и фортов) позволяет разработать непротиворечивую топологическую механику, аналогичную обычной ньютоновской механике. Причем, многие теоремы и законы топологической механики будут аналогичны ньютоновской. Данный прием позволит получить решение физических задач в элементарных функциях, не поддающихся простым решениям в рамках обычной механики. Полученное решение путем обратных проекций на евклидово пространство даст возможность исследовать решение полностью, в отличие от эллиптических функций, не поддающихся методам элементарного анализа.

Ключевые слова: сферический маятник; элементарные функции; векторы в математике и физике; топологические векторы; топологическая механика; корты; форты

Введение

Отступление первое

Существует один принцип, который хорошо известен, но про него часто забывают на практике. Формулируется он так: решение математического уравнения не зависит от практического смысла входящих в уравнение членов. Если говорить проще, то можно сформулировать так: правила сложения чисел не зависят от того, какие числа складывают. Это может быть сложение количества молекул в химии, может быть сложение двух параллельных сил в механике или сложение двух расстояний в геометрии и т. д., но в любом случае числа складываются по одним и тем же законам.

Необходимость такого вступления произошла от того, что при обсуждении предлагаемого решения встретилось следующее возражение: предложенное решение было найдено для совсем другой **физической** задачи, значит, и метод решения не может быть принят. Попытка объяснить, что если уравнение одно и то же, то и решение уравнения будет аналогичным, натолкнулась на довод: но ведь физический смысл у задач разный, значит, и переносить решения с одного случай на другой нельзя!

Мы же исходим из общего методического принципа, сформулированного выше. Заявляем, что если решение какой-то задачи сводится к решению математического уравнения, то решение уравнения будет однозначно одинаковым, независимо от физического смысла решаемой задачи.

Сформулируем философский принцип математики: применение математических символов, уравнений и построений в виде доказательств или математических выводов не зависит от физического смысла решаемых **физических** задач.

Кажется, что этот принцип очевиден и всем известен, но в процессе решения самых разнообразных физических задач авторы столкнулись с тем, что большее количество споров возникает вокруг вопросов, а можно ли применять математические выводы, доказанные для одной конкретной физической задачи, в случае решения другой конкретной физической задачи. Заявлялась необходимость проверки легитимности применяемых математических доказательств.

Но формулировка указанного принципа не означает, что можно его применять, не задумываясь в любых похожих случаях. Есть существенное ограничение. Необходимо доказывать, что случаи переноса не просто внешне похожи, а строго аналогичны **в рамках поставленной задачи**.

В качестве конкретного примера можно привести геометрию Евклида и неевклидову геометрию. В них есть области, в которых эти геометрии полностью совпадают, и теоремы, доказанные в рамках евклидовой геометрии, которые полностью совпадают с аналогами неевклидовой геометрии, но есть и различия[1].

Таким отличием являются и ее следствия, в частности то, что в евклидовой геометрии сумма углов треугольника равна 180^0, а в неевклидовых геометриях это не так.

Следствием сформулированного принципа с учетом ограничения является то, что необязательно доказывать математические теоремы, каждый раз встречаясь с новой физической задачей, достаточно доказать, что в новых условиях не действует ограничение. Другими словами, новая задача не просто внешне похожа, а строго аналогична уже решенной задаче. В частности, для неевклидовой геометрии ограничением является теорема Пифагора и

[1] Это доказывается в любом курсе дифференциальной геометрии, например см. [8] (прим. авт.).

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

ее следствия. Если при доказательстве какой-то теоремы в явном или неявном виде не используется сумма квадратов катетов, то ее доказательство и выводы, можно считать автоматически доказанными для неевклидовой геометрии.

Отступление второе

Сделаем еще одно отступление, которое тоже часто вызывает замешательство. Это соотношение между достаточными условиями и необходимыми условиями для решения задачи.

При объяснении различий между «достаточными» и «необходимыми», приводится, в частности, такой пример.

Утверждение:

Каждый квадрат является ромбом. Истинно.

А утверждение:

Каждый ромб является квадратом. – Ложно.

Различия в том, что достаточные условия – это условия, при выполнении которых утверждение однозначно истинно. А необходимые условия – это те условия без выполнения, которых утверждение **не может быть** истинным.

В примере с ромбом и квадратом ситуация следующая.

Чтобы четырехугольник был ромбом необходимо одно условие:

А. Все грани четырехугольника были равны между собой.

А чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо уже два условия:

А. Все грани четырехугольника были равны между собой.

Б. Все углы четырехугольника должны быть равны 90°.

Т. о. чтобы четырех угольник был ромбом, необходимо выполнение условия А, условие Б – не является обязательным.

«Квадрат – заведомо ромб; однако из того, что четырехугольник – ромб, не следует, что он – квадрат (нужно ещё, чтобы углы были прямые)» [15].

Несмотря на кажущуюся простоту, данный вопрос о разделении необходимых и достаточных условий вызывает замешательство.

Разберемся на общем примере. Допустим, некая физическая задача решена при определенных условиях. Причем условия, при которых была решена задача, вытекают из физического смысла задачи. Далее следует логическая ошибка: условия, при которых решена задача, вместо того, чтобы быть объявленными *достаточными*, объявляются *необходимыми*. А далее следуют следующие рассуждения: «Если все условия, при которых была решена задача, *объявлены* необходимыми, значит, отсутствие любого из списка условий является категорическим доказательством невозможности решения задачи». Но это явная ошибка, происходящая из отсутствия четкого анализа и автоматически включаемой инерции мышления.

Наиболее характерный пример такой ошибки являет история становления неевклидовой геометрии. Все жаркие споры по поводу неевклидовой геометрии проистекали, в первую очередь, от внутреннего сопротивления тому, что некоторые аксиомы Евклида не являются необходимыми для построения непротиворечивой геометрии.

46SAVN219
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

В данном вопросе мало помогало, что с древних времен была известна сферика[2]. Тем не менее, геометрия Лобачевского и геометрия Римана встретила самую горячую критику. Так, например, Гаусс пришел к неевклидовой геометрии раньше Лобачевского, но не опубликовал работы по данному вопросу по причине, указанной им в некоторых письмах. Например, к австрийскому астроному Герлингу. В 1818 г. Гаусс писал: «Я радуюсь, что вы имеете мужество высказаться так, как если бы вы признавали ложность нашей теории параллельных, а вместе с тем и всей нашей геометрии. Но осы, гнездо которых Вы потревожите, полетят Вам на голову»; по-видимому, под «потревоженными осами» Гаусс имел в виду сторонников традиционных взглядов на геометрию, а также априоризма математических понятий» [16].

Состояние проблемы решения задачи сферического маятника

Сначала приведем краткий обзор современного состояния данной задачи.

«Уравнения движения сферического маятника впервые были получены еще в 18 веке. Кривая, которую выписывает сферический маятник, изучена Клеро в 1735 году, Лагранжем и Пюизе в 1842 году» [17]. В настоящее время известно несколько методов решения задачи. Примечательно, что все авторы, исследующие движение сферического маятника, приходят к выводу, что орбита сферического маятника представляет собой прецессирующий овал, близкий к эллипсу на поверхности сферы с радиусом, равным длине маятника.

Рассмотрим некоторые из решений.

Валле-Пуссен решает задачу в цилиндрических координатах [4, с. 200], r, θ и z. С началом координат в точке подвеса. Причем z направлена вертикально, а r, θ – полярные координаты. В качестве уравнений связи координат автор использует «уравнение сферы, интеграл живых сил[3] и интеграл площадей[4]» [4, с. 200]. Но для решения использует не уравнения динамики в виде изначальных уравнений Ньютона, а уравнения связи, упомянутые выше. Т. к., уравнений динамики точки в трехмерном пространстве три и уравнений связи координат тоже три, то, как доказано в теории динамики точки, такая замена допустима и результат, полученный в результате такой замены, будет аналогичным.

В результате проведенных математических преобразований автор приходит к выводу, что в проекции на горизонтальную плоскость xy траектория представляет собой прецессирующий овал, близкий к эллипсу. В проекции на вертикальную плоскость – траектория качается от параллели b до параллели c (см. рисунок 1).

Аналитическое решение, полученное Валле-Пуссеном, выражается в виде двух интегралов

$$T = l\int_b^c \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}, \tag{1}$$

где: T – полупериод движения маятника, l – длина маятника, b и c – параллели максимального подъема и опускания траектории, соответственно, $\varphi(z)$ – эллиптическая функция:

$$\varphi(z) = (l^2 - z^2)(2gz + h) - C^2, \tag{2}$$

[2] Так в древности называлась сферическая геометрия (прим. авт.).

[3] Закон сохранения энергии (прим. авт.).

[4] Закон сохранения кинетического момента (прим. авт.).

здесь: l – длина маятника, g – ускорение свободного падения, h – полная механическая энергия, C – кинетический момент.

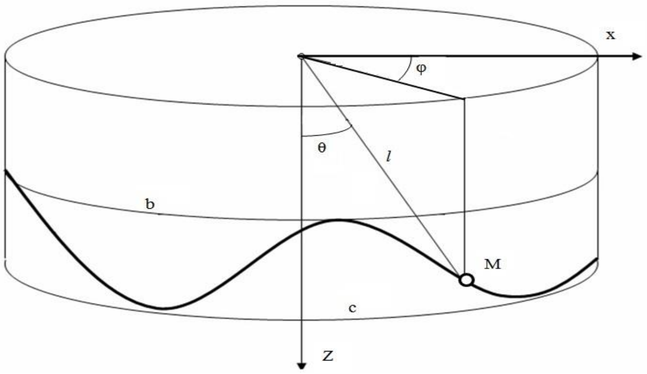

Рисунок 1. *Примерный вид решения Валле-Пуссена*[5] *(составлено авторами)*

Второй интеграл решения записывается в виде:

$$\Theta = Cl\int_b^c \frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{\varphi(z)}}, \tag{3}$$

здесь: Θ – амплитуда угла θ (см. рисунок 1), остальные обозначения совпадают с обозначениями (1) и (2).

Глядя на рисунок, можно сразу указать ошибку автора. Дело в том, что «эллипсы» на параллелях b и c имеют разные размеры полуосей. Потому, что поверхность, по которой движется сферический маятник, не цилиндр, а сфера. Наверняка именно поэтому Валле-Пуссен не приводит рисунок полученного решения. Более того, из интеграла (3) следует, что окончательное решение автор получает все-таки в сферических координатах, хотя и в неявном виде. Но аналитические результаты не вызывают сомнений. В них изменение больших полуосей «эллипса» получаются автоматически в процессе вычислений.

Другие авторы, например П. Аппель [1, с. 433] и Н.Н. Бухгольц [3, с. 427] сразу вводят сферические координаты. В результате П. Аппель, практически повторяя математический метод вывода (за исключением системы координат), получает тот же самый результат вплоть до обозначений. Н.Н. Бухгольц за счет введения другой подстановки получает конечный интегралы в несколько ином виде.

Так интеграл полупериода движения сферического маятника получен в виде:

$$T = \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}, \tag{4}$$

здесь: T – полупериод обращения маятника по орбите; u – новая переменная, $u = \cos\varphi$; а $F(u)$ определяется выражением:

$$F(u) = \left(h + 2\frac{g}{l}u\right)(1 - u^2) - c^2. \tag{5}$$

Остальные обозначения совпадают с (10) и (11).

[5] Оговоримся сразу, Валле-Пуссен не приводит рисунка своего решения, по причине указанной далее (прим. авт.).

«Поскольку F(u) многочлен третьей степени относительно *u*, то стоящий в правой части интеграл будет эллиптическим. Т. о. зависимость между *u* и *t*, а следовательно и между φ и t может быть выражена с помощью соответствующей эллиптической функции, называемой эллиптической функцией Вейерштрасса» [3, с. 429].

А вертикальная амплитуда качания орбиты выражается интегралом:

$$\Theta = c\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{(l^2-u^2)\,F(u)} . \tag{6}$$

То, что решения, приведенные в учебниках П. Аппеля и Н.Н. Бухгольца, аналогичны, хорошо видно из сравнения рисунков 2 и 3.

Отметим главное сходство между интегралами (1), (3) и (4), (6). Все интегралы полученных решений являются уравнениями с одним единственным неизвестным. В уравнениях (10) и (3) – это координата *z*, а в (4) и (6) – это переменная *u*.

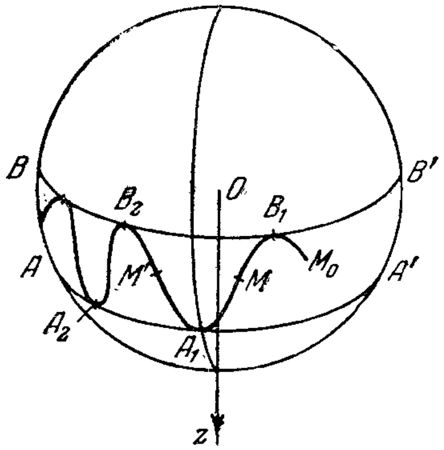

Рисунок 2. *Движение сферического маятника из учебника П. Аппеля [1, с. 435]*

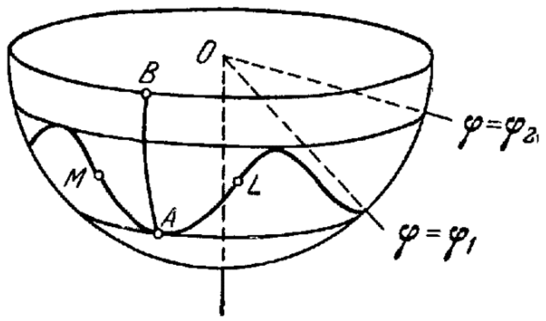

Рисунок 3. *Движение сферического маятника из учебника Н.Н. Бухгольца [3, с. 431]*

Несколько иной подход применили авторы в [7]. Они рассматривают движение обычного плоского маятника на вращающейся платформе. Авторы статьи не указывают, что случай движения плоского маятника на вращающейся платформе идентичен сферическому маятнику, тем не менее, полученные ими решения полностью совпадают с решениями сферического маятника.

Проанализируем полученные решения. Во-первых, отметим, что получено не одно уравнение с одним неизвестным, а два уравнения с одним неизвестным. Причем одно уравнение дает решение движения тяжелой точки вдоль траектории, а второе – движение самой траектории в пространстве. Т. о., задача сведения к одномерному случаю не выполнена до конца. Тем не менее, полученные решения позволяют получить зависимость координат точки в трехмерном пространстве в зависимости от времени.

Что примечательно, хотя уравнений два, но они независимы друг от друга, что и дает возможность решить задачу движения. Явным недостатком полученных решений является появление эллиптических интегралов в решениях. Проблема в том, что эллиптические интегралы не решаются аналитически, а их значения можно получать только численными методами. По-видимому, это является неизбежным следствием применяемых методов.

Сведение к одномерной задаче

Анализируя различные источники, мы приходим к выводу, что решение физических задач только тогда приводят к полному решению в элементарных функциях, когда задачу удается свести к одномерному случаю. В противном случае задачу либо не удается решить, либо решение становится таким сложным, что исследовать полученное решение до конца не удается. Например, «в большинстве случаев (например, в задаче трех тел) не удается ни решить систему дифференциальных уравнений движения, ни достаточно полно исследовать поведение решений» [2, с. 21] и даже «анализ общей потенциальной системы с двумя степенями свободы выходит за рамки возможностей современной науки» [2, с. 26]. В тоже время анализ системы с одной степенью свободы решается в полном объеме. Более того, некоторые задачи, которые удалось решить полностью, например задача Кеплера, решена полностью именно методом сведения к одномерному случаю.

Ввиду особой важности рассмотрим пример сведения механической задачи к одномерному случаю подробно.

«Определение. Системой с одной степенью свободы мы будем называть систему, описываемую одним дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \quad (7)$$

Кинетической энергией называется квадратическая форма

$$T = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} \quad (8)$$

Потенциальной энергией называется функция

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi \quad (9)$$

Заметим, что потенциальная энергия определяет *f*» [2, с. 21].

Отметим, те факты, которые опустил уважаемый автор. Во-первых, функция *f* входит и в уравнение движения (7) и под интеграл потенциальной энергии (9). Тогда из (9) следует, что

$$\frac{dU}{dx} = f(x) \quad (10)$$

Подставляя (10) в (7) окончательно получим уравнение движения в форме

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (11)$$

46SAVN219
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Во-вторых, движение материальной точки определяется только одним уравнением, либо в форме (7), либо в виде (11) которое зависит только от одной переменной.

В-третьих, для того, чтобы существовало уравнение движения в виде (11), поле в котором движется материальная точка должно быть потенциальным. Т. е. должно существовать потенциальная энергия в виде (9). Дальше будет ясно, зачем мы акцентируем внимание на этих пунктах.

Ввиду важности метода сведения двумерной задачи к одномерной приведем доказательство полностью.

«Закон сохранения кинетического момента позволяет свести задачу о движении в центральном поле к задаче с одной степенью свободы. Благодаря этому, движение в центральном поле можно исследовать полностью.

Сведение к одномерной задаче. Рассмотрим движение точки (массой 1) в центральном поле на плоскости:

$$\frac{d^2 r}{d t^2} = -\frac{\partial U}{\partial r},\ U = U(r).$$

По закону сохранения кинетического момента величина $M = \frac{d\varphi(t)}{d t} r^2(t)$ постоянна.

Теорема. При движении материальной точки единичной массы в центральном поле ее расстояние от центра поля меняется так, как r в одномерной задаче с потенциальной энергией

$$V(r) = U(r) + \frac{M^2}{2r^2}.$$

Величина V(r) называется эффективной потенциальной энергией.

Доказательство. Дифференцируя соотношение $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} e_r + r\frac{d\varphi}{dt} e_\varphi$, находим

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\cdot\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)^2\right)\cdot e_r + \left(2\cdot\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + r\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\cdot e_\varphi.$$

Ввиду центральности поля

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial U}{\partial r} e_r.$$

Поэтому уравнение движения в полярных координатах принимает вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\cdot\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2 = \frac{\partial U}{\partial r},\quad 2\cdot\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + r\cdot\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) = 0$$

Но по закону сохранения кинетического момента

$$\frac{d\varphi}{d t} = \frac{M}{r^2}.$$

Поэтому

$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial r} + r \cdot \frac{M^2}{r^4}$ или $\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial r}$, где: $V = U + \frac{M^2}{2r^2}$ » [2, с. 35].

Проанализируем то, что «осталось за кадром». Самое главное, что доказательство остановилось в тот момент, как только первоначальная система уравнений движения была сведена к одному единственному уравнению, в котором присутствует одна единственная переменная (координата). Но именно это мы (см. выше) приводили в качестве необходимого условия существования одномерной динамической задачи. Второе необходимое условие – существование потенциального поля, выполняется изначально. Все остальные условия (центральность поля и закон сохранения кинетического момента), являются достаточными, а значит необязательными для того, чтобы решить поставленную задачу. Фактически эти дополнительные условия нужны только для выполнения математических преобразований, в результате которых достигается конечный результат.

Сформулируем основной принцип (в виде теоремы), который очевиден, но до сих пор не встречался в учебной и научной литературе.

Если в результате легитимных математических преобразований начальная система уравнений движения динамической системы сводится к единственному уравнению, содержащему единственную переменную, то такая динамическая система сводится к одномерной задаче. И все решения, полученные для одномерной системы, автоматически распространяются на первоначальную систему.

Под легитимными математическими преобразованиями мы понимаем любые математические преобразования, не противоречащие законам математики, например, переходы систем координат, подстановки, замены переменных и т. д. Не важно, каким путем, важно не нарушать законы логики и математики, главное результат.

Отметим еще одно, закон сохранения кинетического момента использован как математическая подстановка для замены переменных. Из уравнения

$$M = \frac{d\varphi}{dt} r^2 \qquad (12)$$

выводится формула:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{r^2}. \qquad (13)$$

Уже последняя формула используется как подстановка, чтобы исключить из уравнения движения переменную φ и заменить на переменную r.

Этот прием следует из известного принципа, что если существует уравнение

$$M(x, y) = 0, \qquad (14)$$

где: M – любое математическое выражение, обусловливающее однозначную связь между переменными x и y.

Это означает, что переменные x и y не являются независимыми. Если можно вывести явную связь в виде

$$y = N(x) \qquad (15)$$

то, подставляя (15) в уравнения движения можно избавиться от одной из переменных.

Если x и y являются координатами, то говорят, что координаты не являются независимыми. Ту координату, которую можно исключить из уравнения движения подстановкой (15) называют циклической.

Причем наличие закона сохранения кинетического момента является достаточным, но не обязательным (необходимым) условием. Различие состоит в том, что закон сохранения кинетического момента является частным случаем выражения (15). Поэтому, если существует закон сохранения кинетического момента, значит, существует частный случай функции (15) в виде (7), соответственно, не все координаты являются независимыми, и одна из координат может быть исключена из уравнения движения материальной точки.

Это отступление необходимо потому, что существует мнение, что привести задачу динамики к одномерной задаче можно, только если существует закон сохранения кинетического момента для центрального поля в классическом виде. Мы же утверждаем, что если существует соотношение связи между координатами в виде (15), где N – любое математическое выражение, то задача однозначно сводится к одномерной.

То, что вышесказанное, в том числе и основной принцип сведения к одномерной задаче не только не сформулирован, но и не используется, покажем на конкретном примере. В [2, с. 44] приведен пример осесимметричного потенциального поля, далее приводится доказательство теоремы о сохранении кинетического момента относительно оси z [2, с. 45]. Причем делается важное замечание «Доказательство сохраняет силу для всякого силового поля, у которого вектор силы F лежит в плоскости r и e_z» [2, с. 45].

Причем, на примере сферического маятника хорошо видно, что если задачу не удается свести к одномерному случаю, то, хотя задачу и удается решить, но решение оказывается сложным, т. к. решение не получается в элементарных функциях, а как минимум, в эллиптических. Все вышесказанное может помочь привести еще одно решение задачи движения сферического маятника, основанного на принципиально других начальных постулатах.

Новый метод анализа сферического маятника

Сферическая механика

Еще в глубокой древности, изучая звездное небо, люди разработали сферическую геометрию. «По-видимому, первым обращением человечества к тому, что потом получит название сферической геометрии, была планетарная теория греческого математика Евдокса (ок. 408–355), одного из участников Академии Платона»[6].

«Сферическая геометрия – математическая дисциплина, изучающая геометрические образы (точки, линии, фигуры), находящиеся на сфере, и соотношения между ними»[7].

Причем в современном состоянии сферическая геометрия имеет явные ограничения. Это касается базовой системы координат (см. рисунок 4).

---

[6] Федосова М. Кругосвет URL: https://www.krugosvet.ru/node/41971?page=0,0 (дата обращения 16.04.2019).

[7] Федосова М. Сферическая геометрия URL: http://masters.donntu.org/2014/fknt/nepochataya/library/article6.htm (дата обращения 16.04.2019).

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

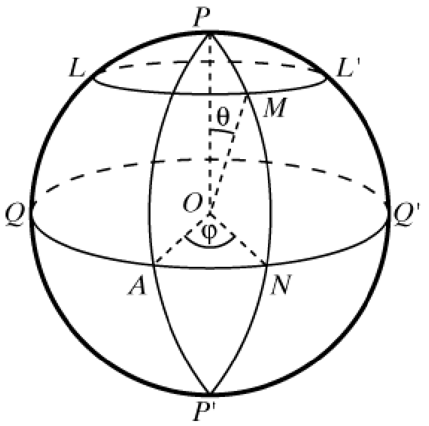

Рисунок 4. *Система координат современной сферической геометрии*[8]

Из рисунка явно видно, что система координат (СК) привязана к евклидовому пространству. Эта традиция идет из основного источника и потребителя сферической геометрии – астрономии. В самом деле, когда наблюдатель находится в центре мира, а наблюдаемые объекты на поверхности небесной сферы, точнее, на проекции объектов на небесную сферу. Естественно, отсюда возникают и задачи, решаемые астрономической сферической геометрией. Принято изучать и рассчитывать положения объектов на небесной сфере относительно наблюдателя в центре сферы. Фактически, правильно бы современную сферическую геометрию называть сферически-евклидовой геометрией.

Чтобы создать законченную истинную сферическую геометрию, необходимо отвязать систему координат (СК) от евклидовой и ввести истинную сферическую систему координат (СК) без привязки к евклидовому пространству. Такую возможность предоставляет дифференциальная геометрия.

Из курса дифференциальной геометрии известно, что кроме прямолинейных евклидовых координат задачи можно решать в криволинейных координатах. Причем такой переход иногда сильно упрощает процесс решения конкретной задачи. «Как показывают уже простейшие примеры, декартовых координат недостаточно для удобной аналитической записи многих конкретных задач» [8, с. 8]. И далее написано: «отметим, что появление таких координат (называемых «криволинейными координатами») является не прихотью математиков, стремящихся ввести в рассмотрение все новые и новые объекты, а, в некотором смысле, практической необходимостью, иногда весьма полезной при конкретных вычислениях» [8, с. 9].

В принципе, на сфере можно ввести много различных СК точно так же, как и в евклидовой геометрии. Рассмотрение различных систем координат в сферической геометрии начнем с прямоугольной СК.

Проведем два ортогональных больших круга на сфере (см. рисунок 5). Один большой круг (экватор) обозначим СХ, другой (начальный меридиан) обозначим СУ. Из сферической геометрии известно, что меридиан и параллель, в том числе и экватор, пересекаются всюду (кроме полюсов) под прямым углом. Т. о. мы получим ортогональную СК на сфере.

[8] Федосова М. Кругосвет // Интернет-источник: https://www.krugosvet.ru/node/41971?page=0,0 (дата обращения 16.04.2019).

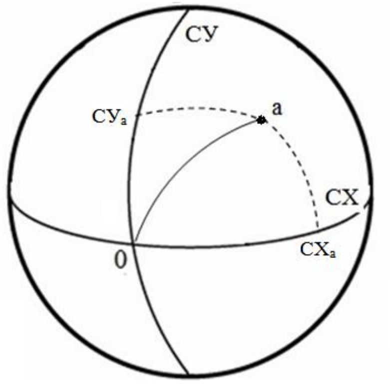

Рисунок 5. *Истинные сферические координаты (составлено авторами)*

Проекции точки *a* (см. рисунок 5) на оси координат будут проходить по геодезическим (отрезкам меридианов и параллелей) проходящим через точку *a* и оси координат. Ясно, что полученная система координат будет локальной, ортогональной и криволинейной. При этом она будет истинно сферической, т. к. полностью отвязана от евклидовой СК.

Необходимо сразу оговорить, введенная система координат очень похожа на географическую систему, т. к. имеют общую основу. Но в отличие от картографов мы будем исчислять координаты не в градусах широты и долготы, а в мерах длины (метрах, сантиметрах и т. д.) вдоль меридианов и широт. А для измерений будем пользоваться гибкой линейкой[9]. К сожалению, простым циркулем пользоваться не удастся, необходимо либо изобретать специальный циркуль, либо разрабатывать специальную методику работы с циркулем.

Полярная система координат на сфере

Т. к. введенная выше сферическая т-плоскость является поверхностью вращения, то естественно введение на ней полярной системы координат.

На сферической т-плоскости назначим полюс начала координат O[10] и проведем начальный меридиан OB (рисунок 6). Введем полярную систему координат (L_t, φ), где: L_t – длина вдоль меридиана до точки M, а φ – угол между начальным меридианом и меридианом, проходящим через данную точку.

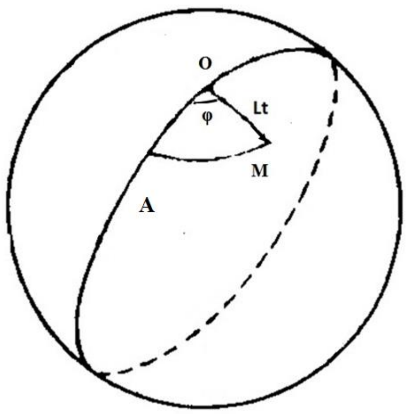

Рисунок 6. *Полярные координаты на сфере (составлено авторами)*

[9] Типа портновского (прим. авт.).

[10] Полюс, как обычно, назначается либо произвольно, либо исходя из удобства конкретной решаемой задачи (прим. авт.).

Понятно, что полярная система на сфере аналогична полярным координатам в евклидовом пространстве, за исключением того, что радиус-вектор будет **искривленным**. В то же время данная система координат очень похожа на географическую систему координат, но широта точки вычисляется не в градусах, а в мерах длины вдоль меридиана.

Отступление третье. Что такое вектор?

Несмотря на интуитивно понятный ответ на вопрос – что такое вектор? Понятие вектора, в различных разделах науки и техники различается и, иногда, довольно существенно.

Для примера приведем два определения понятия вектора.

1. «Под ***вектором*** в элементарной математике понимают направленный отрезок. Этот отрезок изображается стрелкой и обозначается или одной буквой со стрелкой ($\vec{a} \equiv AB$), либо, как мы условимся в настоящем издании, жирным шрифтом **A, B, a, α**, …» [6].

Для векторов, введенных согласно такому определению, существуют следующие свойства:

1. **a + b = b + a** (сложение коммутативно);
2. **(a + b) + c = a + (b + c)** (сложение ассоциативно);
3. **a + 0 = a** (существование нулевого вектора);
4. **a + (- a) = 0** (существование противоположного вектора);
5. $\lambda_1(\lambda_2$ **a**$) = \lambda_1 \lambda_2$ **a** (умножение на число ассоциативно);
6. $(\lambda_1 + \lambda_2)$ **a** $= \lambda_1$ **a** $+ \lambda_2$ **a** (умножение на число дистрибутивно);
7. λ (**a** + **b**) $= \lambda$ **a** $+ \lambda$ **b** (сложение векторов дистрибутивно);
8. 0 **a** = **a** 0 = 0 (умножение на ноль).

Это определение часто называют *определение вектора в геометрии*.

Дадим и другое определение понятия вектора, которое используется в линейной алгебре.

2. «Вектором в линейной алгебре называется любой объект линейного (векторного) пространства, если:

- Определено правило, составляющее любым векторам **x** и **y,** третий вектор, называемый их суммой и обозначаемый $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$;
- Определено правило, составляющее каждому вектору $\boldsymbol{x}$ и каждому числу α новый вектор, называемый произведением α и $\boldsymbol{x}$ и обозначаемый $\alpha\, \boldsymbol{x}$» [14, с. 92].

Причем, для векторов в линейной алгебре отмечается обязательное наличие приведенных выше свойств сложения и умножения.

Отметим существенные отличия в двух приведенных определениях *вектора*. Если в первом случае ясно говорится, что вектор – это отрезок прямой, то во втором это главное свойство опущено. Т. е., второе определение более общее, и, согласно второму определению, под понятие вектор, попадают любые абстрактные математические объекты, лишь бы для них были определены правила сложения векторов и правила умножения вектора на число. Значит, под это определение подпадают, в том числе, и совершенно не геометрические объекты: матрицы, тензоры, функции и т. д. Которые, в общем случае, не могут быть изображены как отрезки прямых, тем не менее, они подпадают под общее определение вектора.

Здесь нелишне вспомнить про различия необходимых и достаточных (необязательных) свойств. Так, каждый направленный отрезок прямой является вектором, но не каждый вектор является отрезком прямой. Т. е., требование, чтобы вектор являлся именно отрезком прямой, является достаточным, но необязательным требованием, чтобы математический объект являлся вектором.

Понятие топологического вектора

Для того, чтобы построенная система координат имела смысл, необходимо ввести понятие вектора в новой системе координат.

Авторы, чтобы не путать с вектором, который по определению прямолинейный, называют криволинейный вектор т-вектором или **кортом**, а единичный криволинейный вектор **фортом**.

Определение. Вектором в топологической системе координат[11] (т-вектором, кортом) будем называть направленный отрезок *геодезической* линии, принадлежащий топологической (в общем случае, неевклидовой) плоскости проходящий от начала в точке ***A*** и до конца в точке ***B*** (см. рисунок 7).

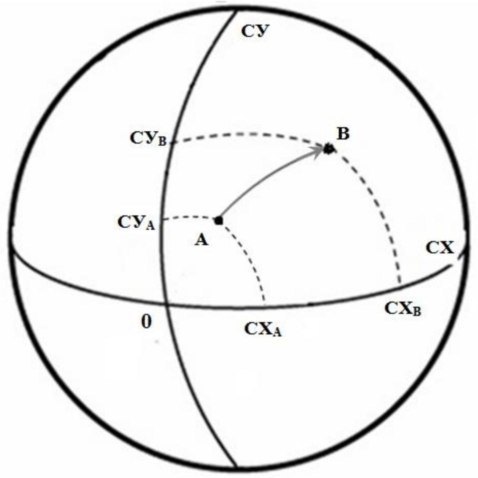

Рисунок 7. *Сферический вектор AB (составлено авторами)*

Легко проверить, что полученный криволинейный вектор обладает почти всеми свойствами обычного прямолинейного вектора в евклидовых координатах[12].

Т. е. правила сложения векторов и правила умножения векторов на скаляр остаются без изменений. Это не надо доказывать отдельно, легко проверить, что в данном случае данные свойства зависят не от вида векторов, а от правил сложения и умножения чисел, в виде координат векторов. Естественным исключением будет определение длины вектора, т. к. теорема Пифагора в криволинейном пространстве не соблюдается[13]. Остальные свойства, как легко показать, будут идентичны свойствам евклидовых векторов. Т. е., правила сложения и

[11] Сферическая система координат (введенная выше) является частным случаем общего принципа введения топологической СК, которую можно ввести на любой неевклидовой плоскости (прим. авт.).

[12] Этот прием называется наследование свойств, когда потомок (в данном случае, т-вектор) имеет некоторые свойства, совпадающие со свойствами родителя (в данном случае, обычных векторов евклидового пространства) (прим. авт.).

[13] Для вычисления длины вектора придется пользоваться хорошо разработанными методами неевклидовой геометрии (прим. авт.).

правила умножения (скалярного, векторного и смешанного) будут совершенно идентичны. Для вычисления длины криволинейного т-вектора придется вводить другие правила.

Произведение т-векторов

Аналогично правилам евклидовых векторов введем понятия произведения т-векторов. Так скалярным произведением т-векторов будем называть скаляр, равный произведению длин т-векторов на косинус угла между ними. А векторным произведением т-векторов будем называть псевдовектор, равный произведению длин векторов, умноженной на синус угла между т-векторами. Не лишним будет упоминание про то, что углы между т-векторами отсчитываются по т-плоскости, а не в пространстве. Причем обозначения произведений т-векторов оставим прежнее, т. е. скалярное произведение будем обозначать обычными (круглыми) скобками

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a \cdot b \cdot \cos \alpha = c,$$

где: $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – т-векторы, a, b – длины векторов (по геодезическим), α – угол между т-векторами, a, c – скаляры.

Аналогично, векторное произведение будем обозначать квадратными скобками:

$$\boldsymbol{a} \times \cdot \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = a \cdot b \cdot \sin \alpha = \boldsymbol{c}.$$

Примечание. По умолчанию, все т-вектора принадлежат одной и той же т-плоскости. Именно поэтому мы и называем вектор c – псевдовектором, потому что он по определению перпендикулярен обоим векторам, лежащим в т-плоскости, а значит, перпендикулярен самой т-плоскости.

Понятие правой и левой тройки векторов, необходимые для операций с векторными произведениями, оставим без изменений. Важно отметить, что простые и замечательные свойства произведений векторов, такие, как равенство длины векторного произведения площади параллелограмма, построенного на векторах в евклидовом пространстве, в т-векторной алгебре, в общем случае, не работают. Дело в том, что площади треугольников, построенных в евклидовой плоскости и сферического треугольника на сферической поверхности не равны между собой. И любые другие фигуры на сфере и на евклидовой плоскости не равны между собой.

Также и смешанное произведение т-векторов лишено смысла. Т. к. векторное произведение двух т-векторов не принадлежит т-плоскости, а перпендикулярно ей.

Дифференцирование т-векторов

Аналогично, легко вводятся[14] и правила дифференцирования т-векторов, которые в основном, совпадает с правилами дифференцирования обычных евклидовых векторов. Правила дифференцирования вектор-функции на неевклидовых поверхностях подробно описаны в курсах теории поверхностей и дифференциальной геометрии, например см. [10] или [11].

Но в отличие от дифференциальной геометрии, изначально привязанной к евклидовому пространству, мы предлагаем проделать ту же самую работу, но полностью отвязавшись от

[14] В математике, в отличие от физики, все математические понятия именно вводятся в соответствии с «общественным договором». Т. е., ученые договариваются между собой, что именно понимать под понятиями «вектора», «дифференциала», «интеграла» и т. д. И пользуются введенными понятиями в соответствие с договорными условиями введенных терминов (прим. авт.).

46SAVN219
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Евклида в чисто криволинейном пространстве. Это необходимо потому, что задачей дифференциальной геометрии является изучение свойств кривых линий и неплоских поверхностей. Нас интересуют движения материальной точки вдоль кривых и в пределах неплоских поверхностей. Другими словами, авторы не претендуют на создание еще одного раздела математики, а всего лишь стремятся получить еще один инструмент для решения физических задач, которые не решаются или полученное решение слишком сложное, если пользоваться имеющимися инструментами.

Отметим только несколько важных свойств т-векторов, необходимых в нашем случае: дифференциал т-вектора – это вектор, принадлежащий той же топологической т-плоскости, т. е. т-вектор. Причем т-вектор дифференциала ортогонален первоначальному т-вектору. Это следует из свойств операции дифференцирования. Так производная $\frac{dy}{dx}$, есть ни что иное, как предел изменения вектора вдоль y, к пределу изменения вдоль оси x, когда $\Delta x \rightarrow 0$. Т. е. производная y по x направлена вдоль Δy, соответственно ортогональна оси y. Точно также вводится понятие производной по времени *t*, т. е. вектора т-скорости.

Аналогично существованию вектора градиента скалярного поля в евклидовом пространстве, можно ввести т-вектор градиента скалярного поля на топологической т-плоскости.

Только при всех перечисленных нововведениях не нужно забывать, что координаты неевклидовые. Другими словами, даже если некоторые уравнения и теоремы будут внешне похожими на обычные, это все-таки неевклидовые уравнения и теоремы.

Т. о. двумерное сферическое пространство, назовем ее т-плоскостью, введенное по указанным выше правилам, будет аналогично (но не идентично!) обычной евклидовой плоскости (двумерной). Принципиальными отличиями будут два свойства. Во-первых, сферическая плоскость имеет конечные размеры, значит все объекты – линии и вектора будут иметь естественное ограничение по размерам[15]. Во-вторых, в сферической плоскости не выполняется теорема Пифагора, значит, длины отрезков, не совпадающих с координатными осями, придется вычислять по правилам криволинейных интегралов.

Другими словами, правила векторного исчисления и векторного анализа из обычного евклидового пространства можно переносить на искривленное т-векторное пространство. При этом необходимо в обязательном порядке учитывать два указанных выше исключения.

Понятно, что введенное понятие т-вектора является промежуточным между определением вектора в геометрии и определением вектора в линейной алгебре.

Сродство с геометрическим вектором состоит в том, что это направленный отрезок линии, который имеет ясный геометрический смысл. Но отличается от обычного геометрического вектора, тем, что он является отрезком не прямой, а в общем случае, криволинейной геодезической линией. Т. о., для т-вектора вычисление длины будет отличаться от соответствующих правил, принятых для геометрических векторов. Т. е., т-вектор, является геометрическим объектом, который можно нарисовать и представить, как направленную линию в пространстве. Этим он принципиально отличается от общих векторов в математике, которые невозможно ни представить, ни нарисовать в пространстве: матрицы, тензоры, функции и т. д.

[15] В геометриях Лобачевского и Римана такие ограничения отсутствуют (прим. авт.).

Т-механика

Введенные выше понятия т-вектора, дифференциала т-вектора и т-вектор градиента скалярного поля позволяют легко разработать т-механику в искривленном т-пространстве как аналог механики Ньютона в евклидовом пространстве.

Покажем это на примере уже введенной сферической т-плоскости.

Основой механики Ньютона являются следующие понятия: перемещения, скорость, ускорение, силы, кинетической и потенциальной энергии.

Понятие перемещения из одной точки к другой не меняются вне зависимости, в каком пространстве они происходят, главное, чтобы были введены координаты точек. Это условие выполняется как в евклидовой, так и в сферической т-плоскости.

Скорость также легко вводится в сферической т-плоскости, как дифференциал перемещения по времени. Т-ускорение, также легко определяется, как дифференциал т-скорости по времени, либо как дифференциал второго порядка перемещения по времени. Естественно, что т-скорость и т-ускорение будут т-векторами.

Понятия кинетической и потенциальной энергии совершенно аналогичны в любом пространстве.

Остается только понятие силы, с ним сложнее, но ненамного.

В принципе можно ввести понятие т-силы, но останется проблема экспериментальной проверки уравнения второго закона Ньютона. Но можно поступить проще.

В современной механике уравнение динамики иногда записывают в виде:

$$\frac{d\,mv}{d\,t} = \frac{\partial U(x)}{\partial x},$$

здесь: mv – импульс, $U(x)$ – потенциальная энергия.

Фактически, в правой части указана не ньютоновская сила, а градиент потенциальной энергии.

Это «нововведение» появилось после работы Г. Герца «Принципы механики, изложенные в новой связи» [5]. В этой работе Г. Герц проводил исследования о возможности перейти в механике от аксиом Ньютона к более общим принципам и законам, чем заложены в ньютоновской механике. Естественно, что такая форма основного закона механики возможна, если материальная точка движется в потенциальном поле. Но мы не предполагаем других условий, поэтому данное ограничение для нас не существенно.

Примечание. Легко видеть, что тем же самым способом можно ввести т-механику в пространстве с любой топологией.

Центральное поле в т-механике

Введем определение центрального поля в т-механике, аналогично соответствующему понятию в евклидовой механике.

Определение. Векторное поле на сфере T^2 называется центральным с центром в O, если оно инвариантно относительно группы движений сферы, оставляющих точку O на месте.

Если точку O выбрать за полюс, то т-векторы т-сил, которые являются т-градиентами потенциальной энергии, в соответствии с вышеуказанными определениями, будут направлены вдоль меридианов.

Совершенно аналогично в т-механике доказывается теорема о потенциальности центрального т-поля ***F***. Причем формулировка данной теоремы аналогична соответствующей теореме ньютоновской механики:

Теорема. Всякое центральное т-поле ***F*** потенциально, а его потенциальная энергия зависит только от расстояния до центра поля, ***U* = *U*(*r*)**.

Доказательство теоремы полностью повторяет аналогичное доказательство механики Ньютона, при замене евклидовых векторов на т-вектора [2, с. 32].

Закон сохранения кинетического т-момента

Аналогично ньютоновской механике в евклидовом пространстве введем понятие кинетического т-момента.

Приведем длинную цитату из учебника, чтобы показать, что доказанные теоремы в евклидовой механике можно без потерь в доказательности переносить в т-механику.

«Определение. Движение материальной точки (массы 1) в центральном поле на плоскости определяется уравнением

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \Phi(r)\, e_r,$$

где: ***r*** – радиус вектор с началом в центре поля O, r – его длина, e_r – его орт. Будем считать нашу плоскость вложенной в трехмерное ориентированное евклидово пространство.

Определение. Моментом количества движения (или кинетическим моментом) материальной точки единичной массы относительно точки O называется векторное произведение $M = \left[r, \frac{dr}{dt}\right]$.

Вектор M перпендикулярен нашей плоскости.

Лемма. Пусть a и b два меняющихся со временем вектора в евклидовом ориентированном пространстве. Тогда

$$\frac{d}{dt}[a, b] = \left[\frac{da}{dt}, b\right] + \left[a, \frac{db}{dt}\right].$$

Доказательство. Это следует из определения производной.

Теорема (закон сохранения кинетического момента). При движении в центральном поле кинетический момент M относительно центра поля O не меняется со временем.

Доказательство. По определению

$$M = \left[r, \frac{dr}{dt}\right].$$

По лемме $\frac{dM}{dt} = \left[\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt}\right] + \left[r, \frac{d^2r}{dt^2}\right]$.

46SAVN219
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Из уравнения движения ввиду центральности поля видно, что векторы $\boldsymbol{r}$ и $\frac{d^2r}{dt^2}$ коллинеарны. Итак, $\frac{dM}{dt} = 0$, т. д.» [2, с. 33].

Поступим следующим образом, введем свои определения и покажем, что если доказательство теоремы не выходит за рамки применения общих свойств, то все доказательства можно перенести на неевклидовый случай.

Определение. Т-моментом количества движения (или кинетическим т-моментом) материальной точки единичной массы относительно полюса O, называется векторное произведение т-векторов:

$$\mathrm{M} = \left[r, \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} \right].$$

Вектор $\boldsymbol{M}$ ортогонален поверхности сферы, а $\boldsymbol{r}$ – т-вектор в сферическом пространстве[16].

Далее, лемма – это не более чем иллюстрация свойства производной. Но для свойств производной совершенно безразлично, какие именно объекты дифференцируются, опять же, отсылаем к главному принципу математики. Поэтому, независимо от того, какие именно вектора дифференцируются, обычные вектора в евклидовом пространстве или т-вектора в криволинейном пространстве, свойства производной останутся неизменными. Поэтому нет необходимости повторять доказательства леммы, якобы, в новых условиях.

Далее используется свойство производной вектора, состоящее в том, что производная вектора ортогональна к первоначальным векторам. Но это именно свойства производной вектора, а не свойство самого вектора.

Поэтому, независимо от того, какой именно вектор дифференцируется, производная вектора **всегда** будет перпендикулярна вектору. А дифференцирование дважды поворачивает вектор два раза на 90^0, соответственно, вторая производная вектора r, поворачивается относительно первоначального вектора r ровно на 180^0, т. е. становится коллинеарной вектору. Причем повторяем, это свойство дифференцирования, а не свойство самого вектора. На этом доказательство заканчивается.

Легко видеть, что если мы, меняя свойства вектора, оставляем неизменными свойства дифференцирования, можем воспользоваться доказанной теоремой, заменяя в нужных местах, обычный евклидовый вектор на т-вектор, а евклидову плоскость на т-плоскость или поверхность сферы. Смысл доказательств от этого не изменится.

Вводя понятие кинетического т-момента, мы придем к доказательству закона сохранения кинетического т-момента на сфере, соответственно и к аналогам законов Кеплера на сфере. Причем, как это ясно из предыдущего, все доказательства будут аналогичны соответствующим доказательствам ньютоновской механики. В соответствии с основным принципом математики, сформулированным в самом начале статьи.

В результате мы получим обоснование того, что в случае движения материальной точки по поверхности сферы в центральном т-поле материальная точка будет двигаться по тем же законам и правилам, которые выполняются для движения материальной точки в евклидовом

[16] Для этого мы должны ввести понятие нормали к поверхности сферы и понятие трехмерного неевклидового пространства. Но подобные вещи уже давно и хорошо известны в неевклидовой геометрии, поэтому мы не будем на них останавливаться (прим. авт.).

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

пространстве в центральном евклидовом поле. Другими словами, движение по сферической поверхности будет совершаться по законам Кеплера в интерпретации сферических координат. Т. е., движение будут совершаться по эллипсам, но эллипсам, нарисованным не на евклидовой плоскости, а на поверхности сферы или т-плоскости.

Переход задачи движений сферического маятника к одномерной

Сделаем тоже, что уже проделано в евклидовой механике Ньютона, а именно переход к одномерной задаче.

«Закон сохранения кинетического момента позволяет свести задачу о движении в центральном поле к задаче с одной степенью свободы. Благодаря этому движение в центральном поле можно исследовать полностью» [2, с. 34]. Посмотрим, есть ли у нас возможность повторить тоже самое, но уже в т-механике. Такая возможность есть, благодаря наследованию свойств[17].

Снова приведем длинную цитату из учебника, чтобы показать, что и в этом случае доказанные теоремы в евклидовой механике можно без потерь в доказательности переносить в т-механику.

«Сведение к одномерной задаче. Рассмотрим движение точки (массы 1) в центральном поле на плоскости:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}.$$

Естественно перейти к полярным координатам ***r*** и ***φ***.

По закону сохранения кинетического момента величина $M = \frac{d\varphi(t)}{dt} r^2(t)$ постоянна (не зависит от t).

Теорема. При движении материальной точки единичной массы в центральном поле ее расстояние от центра меняется так, как r в одномерной задаче с потенциальной энергией

$$V = U(r) + \frac{M^2}{2r^2}$$

Доказательство. Дифференцируя соотношение[18] $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} e_r + r\frac{d\varphi}{dt} e_\varphi$, находим

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) e_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) e_\varphi.$$

Ввиду центральности поля

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial r} e_r.$$

[17] Чуть дальше мы дадим определение наследования и как эффективно использовать правила наследования (прим. авт.).

[18] Разложение вектора по ортам (прим. авт.).

46SAVN219
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Поэтому уравнение движения в полярных координатах принимает вид

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Но по закону сохранения кинетического момента

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{r^2},$$

где: M – независящая от t постоянная, определяемая начальными условиями. Поэтому

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial r} + r\frac{M^2}{r^4} \text{ или } \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial r}, \text{ где: } V = U + \frac{M^2}{2r^2}.$$

Величина *V(r)* называется эффективной потенциальной энергией» [2, с. 35].

Анализируя приведенное доказательство, замечаем, что все доказательство строится на свойствах разложения векторов на проекции координат, свойства дифференцирования векторов и подстановку в виде закона сохранения кинетического момента. В виду того, что разложение векторов на проекции на оси координат и свойства дифференциалов векторов, согласно принятым соглашениям, относятся к наследованным свойствам, т. е. остаются без изменений.

Значит, проведенное доказательство можно автоматически переписать для случая т-механики, заменяя евклидовы вектора на т-вектора, а закон сохранения кинетического момента – заменив на доказанный ранее закон сохранения кинетического т-момента.

Легко видеть, что получено решение сферического маятника в элементарных функциях аналогично элементарному решению кеплеровского движения материальной точки в евклидовой плоскости. Но, в отличие от кеплеровского решения, сферический маятник будет совершать эллиптические движения, но не на евклидовой плоскости, а на поверхности сферы.

Полученное решение в элементарных функциях может быть легко перенесено в обычное евклидовое пространство, например, методами сферической геометрии или аналогичными методами из других разделов геометрии.

Отступление последнее. Что такое принципы наследования и как их эффективно использовать

Выше мы показали, что если строго следовать пути доказательств, приведенных в литературе для обычных (евклидовых) векторов, но заменяя при этом все вектора на т-вектора, то сравнивая свойства обычных (геометрических) векторов и т-векторов можно доказать теоремы не только для обычных, но и для т-векторов. Но можно поступить проще, используя правила наследования.

Вообще правила наследования широко применяются в программировании, но его можно эффективно использовать и в математике.

Для этого введем понятие наследования, аналогичное соответствующему понятию в программировании. Для этого введем понятия «родитель» и «потомок».

Родителем называется математический объект, обладающий более общими свойствами, по сравнению с потомком. Потомком называется математический объект, обладающий всеми свойствами родителя, но и дополнительными свойствами, не имеющимися у родителя.

46SAVN219
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Например, четырехугольник является родителем ромба. Т. к. кроме того, что у ромба четыре угла и четыре стороны, у него есть дополнительное свойство: все четыре его стороны являются равными по величине. Причем ромб является не только потомком четырехугольника, но и родителем для квадрата. Т. к. у квадрата не только все стороны равны, но еще и все углы прямые.

Эффективность принципа наследования состоит в том, что все доказанные теоремы для родителя автоматически, без дополнительных доказательств, могут быть перенесены на потомка. Другими словами, если какая-то теорема доказана для ромба, то она однозначно может применяться для квадрата. Это основано на том, что потомок обладает всеми свойствами родителя без исключений, а, значит, все доказательства основываются на свойствах присущих как для родителя, так и для потомка. Это называется принцип прямого наследования доказательств.

С обратным наследованием сложнее. Дело в том, что у потомка, кроме наследованных свойств, имеются и эксклюзивные свойства, присущие ему и его потомкам, но отсутствующие у родителей. Тем не менее, не все так плохо. Если какая-то теорема доказана для потомка, то использованием только наследованных свойств она может быть применена и для родителей. Например, если для доказательства теоремы для квадрата не использовалось свойство прямых углов, то следствия этой теоремы может без ограничений применяться и для ромбов. Это называется принцип обратного наследования.

Совершенно ясно, что принцип прямого наследования может применяться без каких-либо ограничений, а вот принцип обратного наследования ограниченный. Т. е. применяя принцип обратного наследования, нужно строго следить за тем, какие именно свойства потомка были использованы для доказательств.

Если бы этот принцип был известен в математике и широко использовался бы, то авторам не пришлось бы приводить длинные доказательства того, что в центральном т-поле имеет место теорема кинетического т-момента, а сведение решения сферического маятника к одномерному случаю не требует дополнительных доказательств. Достаточно было бы просто указать, что соответствующие теоремы для евклидовой плоскости используют только те свойства евклидовых векторов, которые унаследованы от более общих т-векторов.

Принцип наследования свойств, на самом деле, широко используется в математике, но только в неявном виде. Принцип состоит в том, что если доказательства нужных теорем основаны на использовании наследованных свойств, то отдельных доказательств не требуются. Так, например, используя свойства дифференциалов, нет необходимости каждый раз доказывать, эти свойства в зависимости от того, какая именно функция дифференцируется. Или, например, нет необходимости каждый раз доказывать теорему Коши отдельно для определенных интегралов и отдельно для несобственных или криволинейных интегралов. Мы использовали тот же самый принцип, но в явном виде.

Обсуждение результатов

Все предыдущие выкладки были необходимы только для того, чтобы прийти к выводу, что движение сферического маятника решается в квадратурах, но только на сферической поверхности. Точно также как в квадратурах решается задача Кеплера о движении материальной точки в центральном поле евклидовой плоскости.

Сформулируем кратко проделанный путь и полученные результаты. Введя новые понятия в виде сферической т-механики, мы в результате получили возможность решить задачу в элементарных функциях. Именно это и является основным достижением, скажем прямо, совсем не простого пути.

Сравнивая полученные результаты, можем резюмировать следующее.

Можно идти простым путем (на самом деле не таким уж и простым) не сворачивая никуда от евклидового пространства и в результате получить сложные, и скажем, для большинства людей непонятные эллиптические интегралы. Которые можно интегрировать только численными методами, затрачивая большие вычислительные мощности. Можно пойти другим путем, ввести т-механику в искривленном (в нашем случае сферическом) пространстве и в результате получить простое решение в элементарных функциях (квадратурах).

Единственная сложность такого пути будет состоять в том, что придется полученные траектории переводить от изображения на сфере в изображение в евклидовом пространстве. Но эти задачи давно и успешно решаются в сферической геометрии и дифференциальной геометрии. Поэтому вряд ли они вызовут большие сложности.

В принципе, подобный метод можно применять в любых случаях, если возможно вместо сложного пространственного движения подобрать двумерную поверхность, в рамках которой движется исследуемая материальная точка.

Если при решении задачи в евклидовом пространстве появляются дополнительные теоремы, облегчающие решение, то вполне возможно аналогичные теоремы могут проявиться и в неевклидовом. Таким примером явилась теорема о сохранении кинетического момента, позволяющая свести задачу кеплеровского движения к одномерной задаче на евклидовой плоскости. Анализ движения сферического маятника по поверхности сферы привел к аналогичной теореме о сохранении кинетического т-момента, и, соответственно, задача о сферическом маятнике свелась к одномерной задаче движения по сферической поверхности.

Для решения сферического маятника мы взяли сферическую поверхность именно потому, что исследуемый объект всегда остается в пределах сферической поверхности. В других случаях это может быть поверхность другой топологии.

Важно внимательно следить за наследуемыми свойствами. Потому, что при переходе от евклидового пространства к неевклидовому, некоторые свойства объектов сохраняют свои свойства, а некоторые нет.

Совершенно естественно, что данный метод эффективен, только в случае если движение материальной точки происходит в рамках строго ограниченной поверхности, например по поверхности сферы, если же движение материальной точки полностью свободно, то никакого выигрыша данная методика не дает, кроме дополнительных сложностей. Но если движение материальной точки происходит, не выходя за рамки определенной поверхности, то переход к топологической механике позволит, как минимум, перейти от трехмерного движения с уравнениями в трех координатах к плоскому случаю с двумя координатами. А если существуют дополнительные условия типа теоремы о сохранения кинетического момента в центральном поле, то появляется возможность свести задачу к одномерной и, тем самым, решить задачу полностью. Чего не позволяют попытки решения той же самой задачи напрямую в обычных евклидовых координатах.

Для примера приведем одну цитату и комментарии к ней.

«Старшие участники опытов часто заявляют, что это маятник Фуко и что наблюдаемые движения суть фигуры Лиссажу[19]. Вниманию учителя: оба эти утверждения неверны» [7].

[19] Имеются в виду движение двухчастотного маятника на вращающейся платформе (прим. авт.).

46SAVN219
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Позволим себе поправить уважаемых авторов. Фигуры, которые выписывает маятник, не ограниченный в колебаниях одной плоскостью качания, к таким относится и сферический маятник и двухчастотный, который рассматривается в упомянутой статье, в самом деле, описывает фигуры Лиссажу, но только не в евклидовой плоскости, а на поверхности сферы. Попытки решения задачи движения неплоского маятника приводят к эллиптическим интегралам в трех координатах евклидового пространства, а переход к сферической т-плоскости сводит задачу к одномерной в элементарных функциях. Чему и посвящена данная статья.

Отметим также взаимоотношения с дифференциальной геометрией, которая занимается схожими проблемами. Эти взаимоотношения можно охарактеризовать двумя словами: никакого соперничества, только полное сотрудничество. Дело в том, что дифференциальная геометрия занимается изучением кривых линий и неплоских поверхностей методами анализа бесконечно малых [13]. Причем все исследования ведутся в рамках евклидового пространства. Предлагаемые методы алгебры и анализа т-векторов изначально оторваны от евклидового пространства. Соответственно, получаемые результаты будут оторваны от обычного евклидового пространства. Т. е. фактически не будут иметь практической пользы. Т. к. результаты исследования будут иметь реальную пользу только тогда, когда они будут переведены на язык обычной ньютоновской механики в обычном евклидовом пространстве.

Для этого и будет нужны методы дифференциальной геометрии. Взаимодействие предлагаемой т-механики и дифференциальной геометрии видятся следующим образом. Задача механики, не поддающаяся методам обычной ньютоновской механики, решается методами т-механики с привлечением алгебры и анализа т-векторов. А полученное решение в виде криволинейной траектории на неевклидовой поверхности переводится в пространственную траекторию в евклидовом пространстве методами дифференциальной геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аппель П. Теоретическая механика. Статика. Динамика точки. Т. 1. – М.: Физматгиз. 1960. – 515 с.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
3. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. – М.: Наука. 1965. – 468 с.
4. Валле-Пуссен. Лекции по теоретической механике. Т. 1. – М.: ИЛ, 1948. – 339 с.
5. Герц Г. Принципы механики изложенные в новой связи. – М.: АН СССР, 1959. – 386 с.
6. Гордиенко А.Б., Золотарев М.Л., Кравченко Н.Г. Основы векторного и тензорного анализа. – Кемерово: Кемеровский гос. ун-т: 2009. – 133 с.
7. Зельдович Я.Б. Двухчастотный маятник на вращающейся платформе. УФН. – r0412d.
8. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: МГУ, 1980. – 439 с.
9. Парс Л.А. Аналитическая динамика. – М.: Наука. 1971 – 636 с.
10. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука. 1974. – 176 с.
11. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – Л.: Гос. Изд. технико-теоретической лит-ры. 1950. – 428 с.
12. Чернавский А.В. Дифференциальная геометрия. – М.: МГУ, 2012. – 91 с.
13. Шарипов Р.А. Курс дифференциальной геометрии: учебное пособие для вузов. – Уфа, Издание Башкирского университета. 1996. – 211 с.
14. Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Физматлит, 2009. – 512 с.
15. Яковлев И.В. Необходимые и достаточные условия. URL: http://mathus.ru/math/iff.pdf.
16. Асеев А. Евклидова и неевклидова геометрия. URL: https://studfiles.net/preview/4251701/page:3/ (дата обращения: 16.04.2019).
17. Журавлев В.М. Прецессия сферического маятника. URL: http://www.spacephys.ru/pretsessiya-sfericheskogo-mayatnika (дата обращения: 16.04.2019).

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Kochetkov Andrey Viktorovich
Perm national research polytechnical university, Perm, Russia
E-mail: soni.81@mail.ru

Fedotov Petr Viktorovich
Professional engineer, Moscow, Russia
E-mail: klk50@mail.ru

New methodical approaches of the solution of the spherical pendulum in elementary functions. Introduction to topological mechanics

Abstract. For the first time, the solution of a spherical pendulum is analytically accurately obtained in elementary functions. To obtain solutions in elementary functions the foundations of vector algebra and vector analysis of topological vectors of non-Euclidean geometry are developed. It is also shown that for any physical problem that does not have an elementary solution within the framework of the vectors of Euclidean geometry, a corresponding non-Euclidean plane can be selected for which topological vectors can be introduced. It is also shown that the introduction of the concept of topological vectors (courts and forts) allows us to develop a consistent topological mechanics, similar to the usual Newtonian mechanics. Moreover, many theorems and laws of topological mechanics will be similar to Newtonian. This technique will allow us to obtain a solution of physical problems in elementary functions that are not amenable to simple solutions within the framework of ordinary mechanics. The obtained solution, by means of reverse projections on Euclidean space, will make it possible to investigate the solution completely, in contrast to elliptic functions, which are not amenable to the methods of elementary analysis.

Keywords: spherical pendulum; elementary functions; vectors in mathematics and physics; topological vectors; topological mechanics; court; fort