

Вестник Евразийской науки / The Eurasian Scientific Journal <https://esj.today>

2026, Том 18, № 2 / 2026, Vol. 18, Iss. 2 <https://esj.today/issue-2-2026.html>

URL статьи: <https://esj.today/PDF/50SAVN226.pdf>

DOI: 10.15862/50SAVN226 (<https://doi.org/10.15862/50SAVN226>)

2.1.1. Строительные конструкции, здания и сооружения (технические науки)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Москалев, М. Б. Решение дифференциального уравнения переноса влаги разложением в ряд Фурье по полному базису синусов и косинусов / М. Б. Москалев, А. Г. Черных // Вестник евразийской науки. — 2026. — Т. 18. — № 2. — URL: <https://esj.today/PDF/50SAVN226.pdf>. DOI: 10.15862/50SAVN226.

For citation:

Moskalev M.B., Chernykh A.G. Solution of the moisture transfer differential equation using Fourier series expansion over a complete basis of sine and cosine functions. *The Eurasian Scientific Journal*. 2026;18(2): 50SAVN226. Available at: <https://esj.today/PDF/50SAVN226.pdf>. DOI: 10.15862/50SAVN226. (In Russ., abstract in Eng.).

УДК 694.141.2

Москалев Михаил Борисович

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»,
Санкт-Петербург, Россия

Доцент кафедры «Металлических и деревянных конструкций»

Кандидат технических наук, доцент

E-mail: cosccc@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7810-6484>

РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=821085

Черных Александр Григорьевич

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»,
Санкт-Петербург, Россия

Профессор кафедры «Металлических и деревянных конструкций»

Доктор технических наук, профессор

E-mail: chagrig@lan.spbgasu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9805-1428>

РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=473049

Решение дифференциального уравнения переноса влаги разложением в ряд Фурье по полному базису синусов и косинусов

Аннотация. В статье представлено аналитическое решение задачи нестационарного двумерного влагопереноса в ортотропном деревянном элементе прямоугольного сечения с гранями, открытыми для влагообмена с окружающей средой. Актуальность исследования обусловлена необходимостью получения эталонных решений, пригодных для анализа распределения влажности по сечению древесины и верификации численных методов расчета влагопереноса в деревянных конструкциях. В отличие от известных подходов, ориентированных преимущественно на равномерное начальное распределение влаги и определение средней влажности по сечению, в настоящей работе получено решение, позволяющее определять влагосодержание в произвольной точке сечения при неоднородном начальном распределении влажности. Математическая модель основана на двумерном уравнении влагопроводности с различными коэффициентами диффузии по координатным направлениям и граничными условиями Робина на всех сторонах области. Решение построено методом разделения переменных с разложением искомой функции в ряд Фурье по собственным функциям

соответствующей задачи Штурма-Лиувилля. Для учета влияния переменной влажности внешней среды использован принцип Дюамеля. Предложен подход к определению начальных модальных коэффициентов по экспериментальным значениям влажности в контрольных точках. Выполнено сопоставление расчетных данных с результатами эксперимента по сушке соснового образца сечением 200×200 мм. Установлено, что точность расчета существенно зависит от полноты задания начального распределения влажности, включая наличие измерений не только на поверхности, но и внутри сечения. Полученное решение может быть использовано в качестве эталонного при верификации численных моделей и анализе кинетики сушки ортотропных деревянных элементов.

Ключевые слова: влажность; влагопроводность; эксплуатация деревянных конструкций; влагосодержание; физическая нелинейность материала; ряды Фурье; дифференциальное уравнение переноса влаги

Введение

Древесина — природный материал, широко используемый в строительстве и отделке. Одним из важнейших свойств древесины является ее гигроскопичность, то есть способность поглощать и отдавать влагу из окружающей среды. Содержание влаги в древесине существенно влияет на ее размеры, прочность и долговечность. Однако моделирование переноса влаги в древесине затруднено сложной внутренней структурой: древесина — анизотропный и неоднородный материал, в котором свойства существенно различаются в продольном, радиальном и тангенциальном направлениях [1]. Такой ортотропный характер древесины означает, что коэффициенты влагопроводности (диффузии влаги) вдоль волокон на порядки выше, чем поперёк волокон (через годичные слои) [2]. Даже между радиальным и тангенциальным направлениями наблюдается значительная разница: так, для сосны обыкновенной коэффициент диффузии влаги в радиальном направлении может достигать $\sim 7,1 \times 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$, тогда как в тангенциальном направлении составляет $\sim 5\text{--}8 \times 10^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$ [3]. Игнорирование анизотропии при моделировании способно привести к существенным погрешностям в оценке градиентов влажности и времени сушки. Например, если у деревянного образца открыты две или более граней, влага движется преимущественно к этим поверхностям, и одномерная модель уже недостаточна [2]. В таких случаях требуется двумерное или трёхмерное описание поля влагосодержания, учитывающее разные коэффициенты диффузии по осям и многократные направления переноса влаги.

Влагоперенос внутри древесины при содержании влаги ниже точки насыщения волокон ($\sim 30\%$) обычно описывается **диффузионными моделями**, основанными на уравнении Фика [4]. Для задач сушки древесины широко применяются численные методы решения уравнения диффузии — метод конечных разностей, конечных элементов и др. — позволяющие учитывать нелинейности, зависимость свойств от влажности и сложные граничные условия. Тем не менее, несмотря на обилие численных подходов, **аналитические решения** остаются востребованными как эталонные. Явные решения, полученные в замкнутом виде, крайне редки для случаев с анизотропией диффузии [5], особенно при наличии граничных условий третьего рода (конвективного массообмена) на поверхности образца. В классическом справочнике Карслоу и Джегера обсуждаются случаи анизотропной теплопроводности, однако даже для простейшего прямоугольного параллелепипеда с нулевыми граничными условиями решение приведено лишь в интегральной форме [5].

В настоящей работе приведено **аналитическое решение двумерного уравнения влагопроводности** для прямоугольного образца из древесины с ортотропной анизотропией при граничных условиях третьего рода по всем сторонам.

Рассматривается плоский образец (например, сечением $0,2 \times 0,2$ м), все грани которого открыты и подвергаются конвективной сушке воздухом. В таких условиях влажность поверхности стремится к равновесной влажности окружающей среде, а интенсивность массообмена характеризуется коэффициентом **массоотдачи** h_m (м/с). Предложенный подход базируется на **разложении решения в тригонометрический ряд Фурье**, удовлетворяющий граничным условиям Робина по обеим осям координат. Подстановка такого двойного ряда в уравнение диффузии и применение метода разделения переменных приводит к системе уравнений для собственных значений (построены синусо- и косинус-функции, удовлетворяющие комбинированным граничным условиям с учетом чисел Био). Решение задачи получено в явном виде в форме **сходящегося тригонометрического ряда**, коэффициенты которого определяются проекцией начального распределения влажности на собственные функции задачи.

Влагосодержание древесины зависит от влажности воздуха окружающей среды. Это проиллюстрировано на диаграмме на рисунке 1, полученной [6]. Влагосодержание, к которому стремится измельченная древесина при длительной выдержке в воздухе определенного состояния, называется равновесным ($W_p(U_p)$). Также по данной теме есть следующие труды [7; 8]:

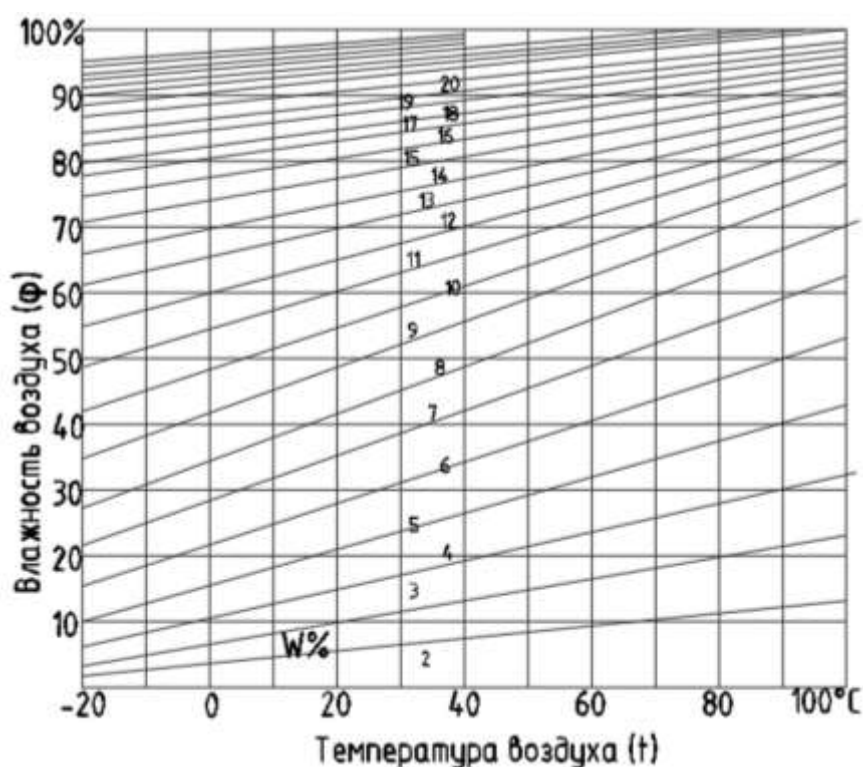


Рисунок 1. Диаграмма равновесной влажности проф. Н.Н. Чулицкого [6]

Вкратце опишем текущее состояние вопроса. Дифференциальное уравнение переноса влаги для трехмерной пластины, полученное из уравнения Фика будет иметь вид:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}(x, y, z) = a' \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где:

U — среднее влагосодержание;

a' — коэффициент влагопроводности;

τ — время.

$$U = \frac{W}{100 \%}. \quad (2)$$

Краевые условия: равномерное начальное распределение:

$$\tau = 0 \dots U_{(x,y,z,0)} = U_n = \text{const}. \quad (3)$$

Граничные условия третьего рода: для поверхности в направлении x (индекс 1):

$$a' \rho_o \left[U_{(\pm R_1, y, z, \tau)} - U_p \right] = \pm a' \rho_o \frac{\partial U}{\partial x_{(\pm R_1, y, z, \tau)}}. \quad (4)$$

Аналогично запишутся условия для двух других поверхностей.

Данная задача была решена для равномерного начального распределения¹ [2; 3; 8]:

$$E = E_1 E_2 E_3 = \frac{U_{(x,y,z,\tau)} - U_p}{U_n - U_p} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n_1} A_{m_2} A_{k_3} \times \\ \times \cos \mu_{n_1} \frac{x}{R_1} \cos \mu_{m_2} \frac{y}{R_2} \cos \mu_{k_3} \frac{z}{R_3} \exp \left[-(\mu_{n_1}^2 Fo'_{1} + \mu_{m_2}^2 Fo'_{2} + \mu_{k_3}^2 Fo'_{3}) \right]. \quad (5)$$

Среднее влагосодержание пластины определяется из выражения:

$$\bar{U}(\tau) = \frac{1}{R_1 R_2 R_3} \int_0^{R_1} \int_0^{R_2} \int_0^{R_3} U_{(x,y,z,\tau)} dx dy dz, \quad (6)$$

где:

R_1, R_2, R_3 — половина толщин пластины в каждом из направлений.

После подстановки значения $U(x,y,z,\tau)$ из уравнения (5):

$$\bar{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{n_1} B_{m_2} B_{k_3} \exp \left[-(\mu_{n_1}^2 Fo'_{1} + \mu_{m_2}^2 Fo'_{2} + \mu_{k_3}^2 Fo'_{3}) \right]. \quad (7)$$

Для стадии регулярного режима допустимо ограничиться рассмотрением решения для одного члена ряда:

$$\bar{E}_{\text{общ}} = \frac{U_k - U_{cp}}{U_n - U_{cp}} = E_1 E_2 E_3 = B_1 B_2 B_3 \times \exp \left[-\left(\mu_{1_1}^2 \frac{a'_{1_1} \tau}{R_1^2} + \mu_{1_2}^2 \frac{a'_{2_2} \tau}{R_2^2} + \mu_{1_3}^2 \frac{a'_{3_3} \tau}{R_3^2} \right) \right], \quad (8)$$

где:

$B_1, B_2, B_3, \mu_{1_1}, \mu_{1_2}, \dots, \mu_{1_3}$ — соответственно средние по сечению начальные амплитуды и корни характеристического уравнения, записанные для первого члена ряда в каждом из направлений 1, 2, 3;

U_k — конечное влагосодержание;

U_n — начальное влагосодержание;

U_{cp} — влагосодержание среды.

$$B_n = \frac{2Bi'^2}{\mu_n^2 (Bi'^2 + Bi' + \mu_n^2)}. \quad (9)$$

¹ А.В. Лыков. Теория теплопроводности. Москва, 1967. 599 с.

$$\mu_{I_n} = \sqrt{\frac{I}{\frac{4}{\pi^2} + \frac{I}{Bi'}}}. \quad (10)$$

Критерий Био (аналоги критерия Кирпичева), который учитывает соотношение между интенсивностью внешнего и внутреннего переноса влаги определяется по следующему выражению:

$$Bi'_n = \frac{\alpha'_n}{a'_n} R_n, \quad (11)$$

где:

α'_n — коэффициент влагообмена см/сек;

a'_n — коэффициент влагопроводности древесины в соответствующем направлении.

Однако, данное решение учитывает только равномерное начальное распределение влаги, что бывает крайне редко на практике, обладает низкой точностью, так как использует только один член ряда, и не позволяет определять влажность в конкретной точке сечения x, y в произвольный момент времени t , а — определяет только среднюю влажность по сечению. Это может быть использовано для решения задач по сушке древесины но недостаточно для рассмотрения прочности и деформативности сечения, влажности в конкретной точке. Также Серговским П.С., Лыковым А.В.², Шубиным Г.С. [2; 3; 8] получено решение дифференциального уравнения влагопроводности для случая параболического распределения, однако оно является сильным упрощением и слабо соотносится с реальным распределением влажности по сечению.

Для этих целей автором было получено новое решение дифференциального уравнения влагопроводности, которое является более общим и лишено указанных недостатков.

Решение дифференциального уравнения разложением в ряд Фурье.

Возьмем дифференциальное уравнение переноса влаги для трехмерной пластины (1) (выведенное из уравнения Фика [4]) и приняв длину деревянного элемента условно бесконечной, запишем это уравнение для двухмерной пластины:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}(x, y, \tau) = a' \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right). \quad (12)$$

Поскольку древесина является ортотропным материалом, коэффициенты диффузии по координатным осям в общем случае различны. Обозначим их через D_x и D_y .

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}(x, y, \tau) = D_x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}. \quad (13)$$

В тензорной форме это будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}(x, y, \tau) = \nabla \cdot (D \nabla u), D = \begin{pmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Граничные условия третьего рода (4) запишем в следующей форме условий Робина [9; 10], связывающих нормальный диффузионный поток через границу с разностью между влажностью на поверхности образца и влажностью внешней среды. На противоположных

² Лыков А.В. Теория сушки. Гос. энерг. изд-во. Москва-Ленинград, 1968. Т. 195. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01006175132> (дата обращения: 03.05.2026).

гранях знак производной по нормали меняется в соответствии с направлением внешней нормали. В покомпонентной записи для прямоугольной области это приводит к стандартным условиям Робина на каждой стороне области:

$$-(D\nabla u) \cdot n = h(u - u_{env}(t)) \text{ на любой границе,} \quad (15)$$

где:

n — внешняя нормаль;

левая часть — выходящий через поверхность диффузионный поток;

правая — «закон Ньютона для массы»: поток пропорционален разности «поверхность – воздух».

Распишем покомпонентно нормали по граням прямоугольника $[0, L_x] \times [0, L_y]$:

$$\begin{aligned} x = 0: n &= (-1, 0). \\ x = L_x: n &= (+1, 0). \\ y = 0: n &= (0, -1). \\ y = L_y: n &= (0, +1). \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда условие Робина на поверхности получит следующий вид:

$$\begin{aligned} x = 0: -(D\nabla u) \cdot n &= -(-D_x u_x, -D_y u_y) \cdot (-1, 0) = D_x u_x = h(u - u_{env}(t)). \\ x = L_x: -(D\nabla u) \cdot n &= -(-D_x u_x, -D_y u_y) \cdot (1, 0) = -D_x u_x = h(u - u_{env}(t)). \\ y = 0: D_y u_y &= h_y(u - u_{env}(t)). \\ y = L_y: -D_y u_y &= h_y(u - u_{env}(t)). \end{aligned} \quad (17)$$

Так явно видно, как меняется знак при переходе с «левой» на «правую» сторону и с «нижней» на «верхнюю». Это полностью согласуется с формальным определением Робина через производную по внешней нормали.

Частный вид на стороне $x = x_b$ (нормаль по x):

$$-D_x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_b} = h(u(x_b, y, t) - u_{env}(t)) \text{ на любой вертикальной границе,} \quad (18)$$

где:

n — внешняя нормаль;

$u(x, y, t)$ — влажность в теле;

D_x, D_y — коэффициенты диффузии по осям;

D — тензор диффузии, нормальный поток $-(D\nabla u) \cdot n$;

H — коэффициент конвективного массообмена;

$u_{env}(t)$ — внешняя влажность среды.

Поток пропорционален разности $u - u_{env}$. Часто берут начальное условие, что влажность по всему сечению равномерная.

Однако на практике, как правило берем элемент, уже подвергавшийся усушке-увлажнению, и соответственно влажность в разных его точках изначально будет разной.

С точки зрения работы элемента на изгиб и определения его жесткости, важнее всего знать влажность на верхней и нижней гранях. Поэтому зададимся 8 точками влажности, как показано на рисунке 2.

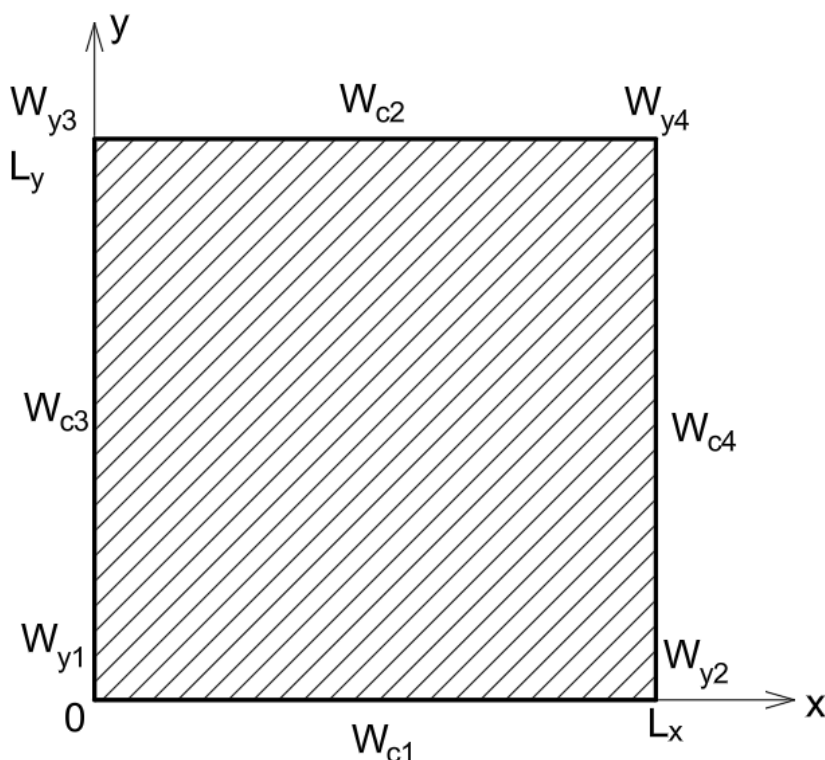


Рисунок 2. Схема расположения точек замера влажности (составлено авторами)

Для удобства дальнейших расчетов из уравнения вычитаем внешнюю влажность:

$$\omega(x, y, t) = u(x, y, t) - u_{env}(t). \quad (19)$$

Тогда внутри:

$$\omega_t = D_x \omega_{xx} + D_y \omega_{yy} - \dot{u}_{env}(t). \quad (20)$$

На поверхности условие упрощается до однородного:

$$-(D \nabla \omega) \cdot n = h \omega. \quad (21)$$

А покомпонентно — те же уравнения, но с u замененным на ω .

$$\begin{aligned} x = 0: D_x \omega_x &= h_x \omega. \\ x = L_x: -D_x \omega_x &= h_x \omega. \\ y = 0: D_y \omega_y &= h_y \omega. \\ y = L_y: -D_y \omega_y &= h_y \omega. \end{aligned} \quad (22)$$

То есть все уравнения у края теперь нулевые по потоку (как в условие Робина), а влияние воздуха перешло в простой «источник» $-\dot{u}_{env}(t)$. В обработке источника используем принцип Дюамеля [11].

Для сушки/влагообмена древесины граница «твёрдое-воздух» обычно описывается конвективной формой: поверхностный поток пропорционален разности между поверхностной влажностью материала и равновесной влажностью, определяемой воздушной средой.

Эксперименты и идентификация h термографией (Lerman & Scheepers, 2023 [12]) и современные мультимасштабные наблюдения роли связанной воды (Penvern et al., 2020 [13]) поддерживают применимость такой постановки.

Зададимся начальными условиями $f(x, y)$ из 8 точек будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}f(0, 0) &= W_{y1} - u_{env}(0). \\f(L_x, 0) &= W_{y2} - u_{env}(0). \\f(0, L_y) &= W_{y3} - u_{env}(0). \\f(L_x, L_y) &= W_{y4} - u_{env}(0). \\f\left(\frac{L_x}{2}, 0\right) &= W_{c1} - u_{env}(0). \\f\left(\frac{L_x}{2}, L_y\right) &= W_{c2} - u_{env}(0). \\f\left(0, \frac{L_y}{2}\right) &= W_{c3} - u_{env}(0). \\f\left(L_x, \frac{L_y}{2}\right) &= W_{c4} - u_{env}(0).\end{aligned}\tag{23}$$

Заданы восемь значений u в восьми точках (четыре угла и четыре середины сторон). Мы просто вычитаем одно и то же $u_{env}(0)$ из каждого из этих восьми чисел — это и есть «опорные» значения для w на $t = 0$. Далее уже под эти точки подберутся коэффициенты мод (во втором шаге). Эта процедура корректна, потому что вычитание постоянной по пространству не меняет потоковую физику на границе.

Однородный край позволяет применять разделение переменных к однородной части уравнения ω и обрабатывать $-u_{env}(t)$ через принцип Дюамеля (свёртка по времени). Далее, применяя метод разделения переменных, представляем решение в виде разложения по модам и сводим задачу к двум одномерным задачам Штурма-Лиувилля с граничными условиями Робина.

Классическое строгое изложение — в книге Pazy [14] (гл. о C_0 — полугруппах) и в работе Johnsen (2019) [15] для параболических задач; прикладное теплотехническое изложение — в гл. «Use of Duhamel's Theorem» у Hahn & Özişik [16].

Рассмотрим одну модальную составляющую решения и будем искать её в виде:

$$\omega(x, y, t) = T(t)X(x)Y(y).\tag{24}$$

Для преобразованной (гомогенизированной) задачи с учетом того, что производная u_{env} по времени равна 0 ($\dot{u}_{env}(t) = 0$), запишем выражение (20) в следующем виде [17]:

$$\omega_t = D_x \omega_{xx} + D_y \omega_{yy} \text{ внутри, } -(D \nabla \omega) \cdot n = h \omega \text{ на границе.}\tag{25}$$

Подставляем (24) в (25):

$$\frac{T'}{T} = D_x \frac{X''}{X} + D_y \frac{Y''}{Y} =: -k,\tag{26}$$

где:

k — одна и та же константа для всех (x, y, t) .

Поскольку левая часть зависит только от t , а правая представляет собой сумму функции от x и функции от y , это равенство возможно лишь в том случае, когда обе части равны одной и той же постоянной разделения k . Следовательно, задача сводится к трём обыкновенным дифференциальным уравнениям [14; 16; 17]:

$$\begin{aligned}X'' + \lambda^2 X &= 0, \\Y'' + \mu^2 Y &= 0, \\T' + kT &= 0, \\k &= D_x \lambda^2 + D_y \mu^2,\end{aligned}\tag{27}$$

где:

λ и μ — собственные значения соответствующих одномерных задач Штурма-Лиувилля с граничными условиями Робина, они определяют пространственную структуру мод $X_m(x)$, $Y_n(y)$, а величина k характеризует скорость их затухания.

Это стандартный приём разделения переменных для линейных параболических уравнений с постоянными коэффициентами и прямоугольной геометрией. Хорошие изложения: глава о методе разделения и собственных функциях у Hahn-Özişik (теплопроводность, в явном виде для конвективных краёв).

Каждая из полученных одномерных задач представляет собой регулярную задачу Штурма-Лиувилля на конечном интервале с граничными условиями Робина. Для таких задач спектр является вещественным, дискретным и состоит из простых собственных значений, а соответствующие собственные функции образуют полный ортогональный базис в пространстве L^2 при единичном весе. Это дает набор $\{X_m\}$ и $\{Y_n\}$; их тензорные произведения $\Phi_{mn} = X_m Y_n$ образуют базис на прямоугольнике. Формальная сторона (самосопряжённость, компактность резольвенты, полнота) для робин-лапласиана изложена у Arendt et al. и в монографии Zettl [18; 19].

Таким образом, получаем частный случай классической спектральной задачи Штурма-Лиувилля с граничными условиями Робина³.

После разделения переменных граничные условия на вертикальных гранях приводят к следующим краевым условиям для одномерной задачи по переменной x :

$$\begin{aligned}x = 0: D_x \omega_x &= h_x \omega \rightarrow X'(0) = \alpha_x X(0), \\x = L_x: -D_x \omega_x &= h_x \omega \rightarrow X'(L_x) = -\alpha_x X(L_x),\end{aligned}\tag{28}$$

где:

$$\alpha_x = \frac{h_x}{D_x}.\tag{29}$$

На горизонтальных гранях:

$$\begin{aligned}y = 0: D_y \omega_y &= h_y \omega \rightarrow Y'(0) = \alpha_y Y(0), \\y = L_y: -D_y \omega_y &= h_y \omega \rightarrow Y'(L_y) = -\alpha_y Y(L_y),\end{aligned}\tag{30}$$

где:

³ Rudnick Z., Wigman I., Yesha N. Differences Between Robin and Neumann Eigenvalues // Commun. Math. Phys. 2021. T. 388, № 3. С. 1603–1635. DOI 10.1007/s00220-021-04248-y.

$$\alpha_y = \frac{h_y}{D_y}. \quad (31)$$

В нашем случае $h_x = h_y = h$, что несколько упрощает расчет [20].⁴ Это и есть одномерные условия Робина⁵ для X и Y , симметричные по величине, противоположные по знаку на концах из-за направления внешней нормали. Таким образом, выполняется стандартное сведение исходной двумерной задачи к двум одномерным задачам Штурма-Лиувилля с граничными условиями Робина [21].

Решаем одномерную задачу по x :

Общее решение уравнения:

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad (32)$$

для одной одномерной моды общее решение до учета граничных условий записывается в виде:

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x), \quad (33)$$

где:

A, B — постоянные интегрирования; в дальнейшем их влияние включается в коэффициенты соответствующего рядового разложения.

Пользуясь ортогональностью функций $\sin$ и $\cos$ можно записать:

$$\begin{aligned} x = 0: X'(0) &= \alpha_x X(0), \\ X'(0) = B\lambda &= \alpha_x X(0) = \alpha_x A \rightarrow B = \frac{\alpha_x}{\lambda} A, \end{aligned} \quad (34)$$

где:

$$\begin{aligned} x = L_x: X'(L_x) &= -\alpha_x X(L_x), \text{ Подставляем } B \\ -\lambda A \sin(\lambda L_x) + \alpha_x A \cos(\lambda L_x) &= -\alpha_x \left[A \cos(\lambda L_x) + \frac{\alpha_x}{\lambda} A \sin(\lambda L_x) \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Делим на A и группируем по $\sin, \cos$:

$$(\alpha_x^2 - \lambda^2) \sin(\lambda L_x) + 2\alpha_x \lambda \cos(\lambda L_x) = 0. \quad (36)$$

После преобразований характеристическое уравнение принимает вид:

$$\tan(\lambda L_x) = \frac{2\alpha_x \lambda}{\lambda^2 - \alpha_x^2}. \quad (37)$$

Выражение (37) называется характеристическим уравнением Робина. Его корни $\lambda = \lambda_m > 0$ дискретны. К сожалению, современной науке неизвестно, точное решение данного уравнения, однако есть приближенные решения. Начиная с $n \geq 1$ корни лежат около узлов $n\pi / L_x$. Из разложения правой части по малости $((\alpha_x L_x) / (n\pi))$ получаем следующее выражение при $n \gg 1$ [22]:

⁴ Cussler E.L. Diffusion : mass transfer in fluid systems. Cambridge University Press, 2009. 631 с.

Bergman T.L., Lavine Adrienne, Incropera F.P. Fundamentals of heat and mass transfer. John Wiley & Sons, Inc., 2019. 750 с.

Rudnick Z., Wigman I., Yesha N. Differences Between Robin and Neumann Eigenvalues // Commun. Math. Phys. 2021. T. 388, № 3. С. 1603–1635. DOI 10.1007/s00220-021-04248-y.

⁵ Crank John. The mathematics of diffusion. Oxford, 2011. 414.

$$\lambda_x \approx \frac{n\pi}{L_x} + \frac{2\alpha_x}{n\pi} \left[1 + \left(\frac{\alpha_x L_x}{n\pi} \right)^2 \right], n = 1, 2, \dots \quad (38)$$

Однако на практике обычно берут не очень много членов ряда (мод), поэтому для $n = 1, 2$ используют следующие формулы или решают уравнение (37) численно:

$$\lambda_1 \approx \frac{\pi}{L_x} \left(1 - \frac{2D_x}{h_x L_x} \right). \quad (39)$$

Для второго корня:

$$\lambda_2 \approx \frac{2\pi}{L_x} \left(1 - \frac{2D_x}{h_x L_x} \right). \quad (40)$$

Для μ_n все аналогично.

Для каждой λ_m , ограничившись первой модой можно записать следующую собственную функцию:

$$X_m(x) = \cos(\lambda_m x) + \frac{\alpha_x}{\lambda_m} \sin(\lambda_m x). \quad (41)$$

Аналогичные шаги для Y дают:

$$Y_n(y) = \cos(\mu_n y) + \frac{\alpha_y}{\mu_n} \sin(\mu_n y), \tan(\mu_n L_y) = \frac{2\alpha_y \mu_n}{\mu_n^2 - \alpha_y^2}. \quad (42)$$

Рассмотрим уравнение времени (27) при следующих условиях:

$$D_x, D_y > 0, \lambda_m, \mu_n > 0. \quad (43)$$

Уравнение времени (27) умножаем на e^{kt} :

$$e^{kt} T' + k e^{kt} T = \frac{d}{dt} (e^{kt} T(t)) = 0 \rightarrow e^{kt} T = C \rightarrow T(t) = C e^{-kt}, \quad (44)$$

где:

$C = T(0)$ — постоянная интегрирования.

Полученное выражение следует из применения метода интегрирующего множителя к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка.

Следовательно, решение, соответствующее одной моде разложения, имеет вид:

$$\omega_{mn}(x, y, t) = C_{mn} e^{-k_{mn} t} X_m(x) Y_n(y). \quad (45)$$

По мере увеличения порядковых номеров мод по переменным x или y их вклад в общее решение становится менее существенным.. Разные D_x и D_y дают разный вклад в k_{mn} , что прямо моделирует анизотропию древесины: вдоль волокон сглаживание быстрее, чем поперек [23; 24].

Складывая все моды (члены ряда) получим следующее общее однородное решение:

$$\omega_{oo}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} e^{-k_{mn} t} X_m(x) Y_n(y), \quad (46)$$

где:

k_{mn} — определяется из уравнения (27);

λ_m и μ_n — определяются из характеристических уравнений Робина (37) и (42).

После построения общего решения однородной задачи перейдём к учёту влияния внешней влажности среды.

Произведение частных решений $X_m(x)Y_n(y)$ примем как ортогональный базис $\{\Phi_{mn}(x,y)\}$:

$$\Phi_{mn}(x,y) = X_m(x)Y_n(y) \quad (47)$$

и k_{mn} представим в следующем виде:

$$k_{mn} = D_x \lambda_m^2 + D_y \mu_n^2. \quad (48)$$

По первой теореме представления Като из замкнутой симметричной полуограниченной формы получается единственный положительный самосопряжённый оператор A на $L^2(\Omega)$. Подробно эту схему для робин-края излагают Оухабаз (гл. 1–2) и далее: формальный край $\partial_\nu u + cu =$ получается именно из граничного слагаемого формы [25]. Неотрицательность спектра следует также из работы Арент-Варма, который доказал, что робин-лапласиан на произвольных областях через меры на границе порождает субмарковскую C_0 -полугруппу на $L^2(\Omega)$. Это и покрывает классические $h \geq 0$ на $\partial\Omega$ [26]. Если Ω ограничена с липшицевой границей, то вложение $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ компактно (Реллих-Кондрашов). Тогда резольвента $(A + I)^{-1}: L^2 \rightarrow H^1 \rightarrow L^2$ компактна, значит у A компактная резольвента: спектр — набор собственных значений конечной кратности, копящийся только к $+\infty$; собственные функции образуют ортонормированный базис $L^2(\Omega)$. Для робин-лапласиана это сформулировано, например, у Frank: при достаточно регулярной границе спектр «чисто дискретный». Для теоремы вложения см. Мазья [27; 28].

Перечисленные выше утверждения сохраняют силу и для оператора дивергентной формы в случае D_x и D_y .

Накладывая начальные условия, с учетом самосопряжённости [25; 27] оператора и полугруппы на $L^2(\Omega)$ [29], а также неотрицательности спектра $\{k_{mn}\}$ и полноты базиса (смотри обзоры Данерса и связанные результаты Фабера-Крана для Робина [30]) можно писать:

$$\omega(x,y,t) = \sum_{m,n} a_{mn}(t) \Phi_{mn}(x,y). \quad (49)$$

Эта конструкция корректна именно при робин-краях [26].

Уравнение (20) проецируем на собственную функцию Φ_{mn} , умножая его на Φ_{mn} и интегрируем его по области Ω . Используя самосопряжённость оператора, которая следует из интегрирования по частям с учётом граничных условий Робина, получаем:

$$\frac{d}{dt} \langle \omega, \Phi_{mn} \rangle + k_{mn} \langle \omega, \Phi_{mn} \rangle = -\dot{u}_{env}(t) \int_{\Omega} \Phi_{mn} d\Omega, \quad (50)$$

где:

правая часть — проекция источника.

Исходя из ортогонального разложения в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$ берем $L^2(\Omega)$ со скалярным произведением. Общий вид его следующий:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x,y)g(x,y) d\Omega. \quad (51)$$

Для лапласиана с краем Робина оператор самосопряжён и имеет дискретный спектр; его собственные функции образуют полный ортогональный базис $\{\Phi_{mn}\} \subset L^2(\Omega)$. Это обеспечивают формы с граничным членом Робина и компактность резольвенты на ограниченных областях [19].

Поскольку $\langle \omega, \Phi_{mn} \rangle = a_{mn}(t) \|\Phi_{mn}\|^2$, после деления на $\|\Phi_{mn}\|^2$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для коэффициента:

$$a'_{mn}(t) + k_{mn}a_{mn}(t) = -\beta_{mn}\dot{u}_{env}(t), \beta_{mn} = \frac{\int_{\Omega} \Phi_{mn} d\Omega}{\int_{\Omega} \Phi_{mn}^2 d\Omega}. \quad (52)$$

Именно здесь появляется коэффициент β_{mn} : пространственная константа 1 проецируется на моду Φ_{mn} . Такой спектральный вывод с робин-краем — стандарт: он опирается на самосопряжённость робин-лапласиана и ортогональность мод [26].

Распишем подробнее нахождение β_{mn} . Применим стандартную проекционную формулу для Дюамель/полугруппы [18; 29]:

$$\beta_{mn} = \frac{\int_{\Omega} \Phi_{mn}(x, y) dx dy}{\int_{\Omega} \Phi_{mn}^2(x, y) dx dy} = \frac{S_x(\lambda_m)S_y(\mu_n)}{N_x(\lambda_m)N_y(\mu_n)}. \quad (53)$$

Берем интегралы по оси x .

Среднее S_x (числитель x):

$$S_x(\lambda) = \int_0^{L_x} X_m(x) dx = \frac{\sin(\lambda_m L_x)}{\lambda_m} + \frac{\alpha_x}{\lambda_m^2} (1 - \cos(\lambda_m L_x)). \quad (54)$$

Норма N_x (знаменатель по y):

$$N_x(\lambda_m) = \int_0^{L_x} X_m^2(x) dx = \frac{L_x}{2} \left(1 + \frac{\alpha_x^2}{\lambda_m^2} \right) + \frac{1 - \frac{\alpha_x^2}{\lambda_m^2}}{4\lambda_m} \sin(2\lambda_m L_x) + \frac{\alpha_x}{2\lambda_m^2} (1 - \cos(2\lambda_m L_x)). \quad (55)$$

Аналогично находим N_y и S_y :

$$S_y(\mu_n) = \int_0^{L_y} Y_n(y) dy = \frac{\sin(\mu_n L_y)}{\mu_n} + \frac{\alpha_y}{\mu_n^2} (1 - \cos(\mu_n L_y)). \quad (56)$$

$$N_y(\mu_n) = \int_0^{L_y} Y_n^2(y) dy = \frac{L_y}{2} \left(1 + \frac{\alpha_y^2}{\mu_n^2} \right) + \frac{1 - \frac{\alpha_y^2}{\mu_n^2}}{4\mu_n} \sin(2\mu_n L_y) + \frac{\alpha_y}{(2\mu_n^2)(1 - \cos(2\mu_n L_y))}. \quad (57)$$

Решаем линейное ОДУ:

$$a'_{mn}(t) + k_{mn}a_{mn}(t) = -\beta_{mn}\dot{u}_{env}(t). \quad (58)$$

Умножая на $e^{k_{mn}t}$ и интегрируя, получаем формулу Дюамеля:

$$a_{mn}(t) = e^{-k_{mn}t} \left[a_{mn}(0) + \beta_{mn} \int_0^t e^{k_{mn}s} (-\dot{u}_{env}(s)) ds \right]. \quad (59)$$

Это частный случай общего принципа Дюамеля для параболических задач [29].

Чтобы исключить производную u_{env} из подынтегрального выражения, применим интегрирование по частям:

$$\int_0^t e^{ks} (-\dot{u}_{env}(s)) ds = -e^{kt} u_{env}(t) + u_{env}(0) + k \int_0^t e^{ks} (-u_{env}(s)) ds. \quad (60)$$

Подставляем ⁶ в ⁷ (59):

$$a_{mn}(t) = e^{-k_{mn}t} \left[a_{mn}(0) + \beta_{mn}(-e^{k_{mn}t}u_{env}(t) + u_{env}(0) + \int_0^t e^{k_{mn}s}(u_{env}(s))ds) \right]. \quad (61)$$

Задание начальных коэффициентов $a_{mn}(0)$.

Если известна функция $u(x,y,0)$, то $w(x,y,0) = u(x,y,0) - u_{env}(0)$ и

$$a_{mn}(0) = \frac{\int_{\Omega} \omega(x,y,0)\Phi_{mn}(x,y)d\Omega}{\int_{\Omega} \Phi_{mn}^2(x,y)d\Omega}. \quad (62)$$

При наличии лишь ограниченного числа измерений, в частности восьми экспериментальных точек, используют усечённое модальное разложение, а коэффициенты $a_{mn}(0)$ определяют методом наименьших квадратов или из соответствующей системы линейных уравнений. Такой подход согласуется с разложением по тому же базису собственных функций, удовлетворяющих граничным условиям Робина. Обоснование соответствующих спектральных разложений приведено в работах по робинову лапласиану [26].

Поскольку исходные данные ограничиваются восемью начальными измерениями влажности на границе, коэффициенты $a_{mn}(0)$ определяются не по интегральным формулам по области, а путём непосредственной подгонки по экспериментальным данным.

Для этого применяется метод наименьших квадратов: при известных модальных функциях $\Phi_{mn}(x,y) = X_m(x)Y_n(y)$, подбираются такие коэффициенты, при которых соответствующая линейная комбинация наилучшим образом согласуется с результатами измерений. Ниже приведены основные этапы этой процедуры и используемые расчётные формулы.

Это выглядит следующим образом:

Обозначим точки с известными начальными значениями влажности как (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, 8$:

$$w_i := u(x_i, y_i, 0) - u_{env}(0) \quad (63)$$

и

$$\phi_i := \Phi_{mn}(x_i, y_i) = X_m(x_i)Y_n(y_i). \quad (64)$$

Собираем матрицу $\Phi \in \mathbb{R}^{8 \times K}$ со столбцами Φ_{mn} для выбранных $K = M \times N$ мод.

Формула для одной моды(одном члене ряда) при 8 точек замера влажности выглядит следующим образом⁸:

$$a_{mn}(0) \approx \frac{\sum_{i=1}^8 w_i \Phi_{mn}(x_i, y_i)}{\sum_{i=1}^8 \Phi_{mn}^2(x_i, y_i)} = \frac{w_1 \Phi_1 + w_2 \Phi_2 + \dots + w_8 \Phi_8}{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \dots + \Phi_8^2}. \quad (65)$$

Важной оговоркой является то, что данная формула справедлива при любом количестве точек начального распределения влажности.

⁶ Hahn D.W., Özışık M. Necati. Heat conduction. Wiley, 2012.

⁷ Özışık M. Necati. Heat conduction. Wiley, 1993. 692 с.

⁸ Lawson C.L., Hanson R.J. Solving least squares problems. SIAM, 1995. 337 с.

Требуется определить коэффициент $a_{mn}(0)$, минимизирующий сумму квадратов отклонений.⁹ При изменении числа экспериментальных точек структура формулы сохраняется; изменяется лишь число учитываемых измерений [31]. Для повышения точности и при высокой погрешности измерений применяют специальные методы [32–35] и гораздо более сложные формулы, к примеру:

$$a(0) = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T w, \quad (66)$$

где:

$\Phi \in R^{8 \times K}$: $\Phi_{i,k} = \Phi_{mn}(x_i, y_i)$, вектор наблюдений $w = (w_1, \dots, w_8)^T$.

При $u_{env}(t) = \text{const} = u_{env}$, с учетом¹⁰ [36–38] формула (61) сильно упрощается:

$$e^{-k_{mn}t} k_{mn} \int_0^t e^{k_{mn}s} (u_{env}(s)) ds = k_{mn} \int_0^t e^{-k_{mn}(t-s)} u_{env} ds = k_{mn} u_{env} \frac{1 - e^{-k_{mn}t}}{k_{mn}} = u_{env} - u_{env} e^{-k_{mn}t} \quad (67)$$

так как $u_{env}(0) = u_{env}$, то...

Преобразуем выражение в круглых скобках в формуле (61):

$$e^{-k_{mn}t} u_{env}(0) - u_{env}(t) + k_{mn} \int_0^t e^{k_{mn}s} (u_{env}(s)) ds = e^{-k_{mn}t} u_{env} - u_{env} + u_{env} - u_{env} e^{-k_{mn}t} = 0. \quad (68)$$

И тогда формула (61) упрощается до следующего:

$$a_{mn}(t) = e^{-k_{mn}t} a_{mn}(0). \quad (69)$$

Записываем итоговое решение как ряд:

$$u(x, y, t) = u_{env}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(t) \Phi_{mn}(x, y). \quad (70)$$

При $u_{env}(t) = \text{const} = u_{env}$ выражение (70) представим в следующем виде:

$$u(x, y, t) = u_{env} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_{mn}t} a_{mn}(0) \left(\cos(\lambda_m x) + \frac{\alpha_x}{\lambda_m} \sin(\lambda_m x) \right) \left(\cos(\mu_n y) + \frac{\alpha_y}{\mu_n} \sin(\mu_n y) \right), \quad (71)$$

где:

λ_m берется из (37), μ_n из (42), k_{mn} берется из (48), $a_{mn}(0)$ берется из (65), α_x из (29), α_y из (31). Конвергенция по m, n улучшается с ростом t из-за экспоненциального фактора $e^{-k_{mn}t}$ и положительности k_{mn} . Теория С-0 групп на L^2 с робин-краем дает строгую основу этим рядам. Это также расписано в специальных статьях про Дюамеля для параболических уравнений [39].

Для одной моды формула будет выглядеть следующим образом:

$$u(x, y, t) = u_{env} + a_{11}(0) e^{-k_{11}t} \left(\cos(\lambda_1 x) + \frac{\alpha_x}{\lambda_1} \sin(\lambda_1 x) \right) \left(\cos(\mu_1 y) + \frac{\alpha_y}{\mu_1} \sin(\mu_1 y) \right). \quad (72)$$

Данное выражение позволяет находить влажность в произвольной точке x, y деревянного элемента в произвольный момент времени t .

⁹ Özışık M. Necati. Heat conduction. Wiley, 1993. 692 с

¹⁰ Oppenheim A.V., Willsky A.S., Nawab S. Hamid. Signals and systems. Pearson Education Limited, 2014. 944 с.

Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными

В качестве примера сделаем расчет для соснового бруса сечением 0,20×0,20 м:

Были получены экспериментальные данные распределение влажности в сосновом образце сечением 0,20×0,20 м.

Образец подвергался сушке в штабеле под открытым воздухом при температуре воздуха 15°C и влажности воздуха 70 %.

Все замеры влажности производились влагомером GANN HYDROMETTE COMPACT (табл. 1).

Таблица 1

Распределение влажности по сечению образца
0,20×0,20 м (координаты отсчитываются от середины образца)

№	x, м	y, м	W, %
1	-0,10	0,10	9,8
2	-0,05	0,10	13,3
3	0	0,10	13,1
4	0,05	0,10	12,5
5	0,10	0,10	8
6	0,10	0,05	12,7
7	0,10	0	10,2
8	0,10	-0,05	10,1
9	0,10	-0,10	8,7
10	0,05	-0,10	11
11	0	-0,10	11,3
12	-0,05	-0,10	12,4
13	-0,10	-0,10	12,7
14	-0,10	-0,05	13,8
15	-0,10	0	11,4
16	-0,10	0,05	13,8

Разработано автором Координаты в таблице 1 заданы относительно центра образца. Для подстановки в решение, записанное на области $[0, L_x] \times [0, L_y]$, используем преобразование:

$$x = x_{\text{exp}} \frac{L_x}{2}, y = y_{\text{exp}} \frac{L_y}{2}. \quad (73)$$

Коэффициент диффузии в осях D_x и D_y примем равными коэффициентам влагопроводности древесины в радиальном направлении по данным с. 35 отсюда [2]:

$$D_x = D_y = a_{\text{рад}} = 2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}. \quad (74)$$

Коэффициент влагообмена будет равен по с. 86 [2] рис. 3.5.1 для влажности 0,6, температуры 20°C:

$$h_x = h_y = \alpha = 3,7 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (75)$$

$$\lambda_l = \mu_l = 15,623 \text{ м}^{-1}. \quad (76)$$

Коэффициент k_{11} по (48) равен:

$$k_{11} = 9,764 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1} \quad (77)$$

Для дальнейших расчетов составим программу в среде Mathcad (рис. 3):

$$\begin{aligned}
 h_x &:= 3.7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 3.7 \times 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}} & L_x &:= 20\text{cm} & L_y &:= 20\text{cm} & h_y &:= h_x \\
 D_x &:= 2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} = 2 \times 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} & u_{\text{env}} &:= 12 & D_y &:= D_x \\
 \alpha_x &:= \frac{h_x}{D_x} = 18.5 \cdot \frac{1}{\text{cm}} & \alpha_y &:= \frac{h_y}{D_y} = 1.85 \times 10^3 \frac{1}{\text{m}} \\
 \lambda_1 &:= \frac{\pi}{L_x} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot D_x}{h_x \cdot L_x} \right) = 15.623 \frac{1}{\text{m}} & \mu_1 &:= \frac{\pi}{L_y} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot D_y}{h_y \cdot L_y} \right) = 15.623 \frac{1}{\text{m}} \\
 k_{11} &:= D_x \cdot \lambda_1^2 + D_y \cdot \mu_1^2 = 9.763 \times 10^{-8} \frac{1}{\text{s}} \\
 X_1(x) &:= \cos(\lambda_1 \cdot x) + \frac{\alpha_x}{\lambda_1} \cdot \sin(\lambda_1 \cdot x) & Y_1(y) &:= \cos(\mu_1 \cdot y) + \frac{\alpha_y}{\mu_1} \cdot \sin(\mu_1 \cdot y) \\
 \Phi_{11}(x, y) &:= X_1(x) \cdot Y_1(y) \\
 Wn &:= \begin{pmatrix} -10 & -5 & 0 & 5 & 0 & 10 & 10 & 10 & 10 & 5 & 0 & -5 & -10 & -10 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 0 & 5 & 0 & -5 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -5 & 0 & 5 \\ 9.8 & 13.3 & 13.1 & 12.5 & 22.3 & 12.7 & 10.2 & 10.1 & 8.7 & 11 & 11.3 & 11.3 & 12.7 & 13.8 & 11.4 & 13.8 \end{pmatrix} \\
 k &:= 0.. \text{cols}(Wn) - 1 \\
 Wn_{1,k} &:= Wn_{1,k} + 10 & Wn_{0,k} &:= Wn_{0,k} + 10 \\
 a_{mn0} &:= \frac{\sum_{i=0}^{\text{cols}(Wn)-1} [\Phi_{11}(Wn_{0,i} \cdot 1\text{cm}, Wn_{1,i} \cdot 1\text{cm}) \cdot (Wn_{2,i} - u_{\text{env}})]}{\sum_{i=0}^{\text{cols}(Wn)-1} (\Phi_{11}(Wn_{0,i} \cdot 1\text{cm}, Wn_{1,i} \cdot 1\text{cm})^2)} = 7.35 \times 10^{-4} \\
 u(x, y, t) &:= u_{\text{env}} + e^{-k_{11} \cdot t} \cdot a_{mn0} \cdot \Phi_{11}(x, y) \\
 x &:= 0..4 & y &:= 0..4 \\
 WF_{x,y} &:= u(x \cdot 5\text{cm}, y \cdot 5\text{cm}, 0\text{hr})
 \end{aligned}$$

Рисунок 3. Листинг программы в среде Mathcad 15.0 (разработано автором)

Воспользуемся экспериментальными данными из таблицы 1, для удобства зададим систему координат от левого нижнего угла сечения.

Пересчитанные с учетом этого данные представлены в таблице 2. Коэффициент a_{11} по выражению (29) равен:

$$a_{11} = -5,265 \cdot 10^{-3}. \quad (78)$$

Таблица 2

Таблица влажности в % в различных точках сечения в начальный момент времени. Отсчет координат начинаем от левого нижнего края бруска

x/y	Y, 0 м	Y, 0,05 м	Y, 0,10 м	Y, 0,15 м	Y, 0,20 м
X, 0 м	11,995	11,573	11,401	11,58	12,005
X, 0,05 м	11,573	-23,889	-38,327	-23,285	12,427
X, 0,10 м	11,398	-38,543	-58,877	-37,692	12,602
X, 0,15 м	11,573	-23,892	-38,332	-23,288	12,427
X, 0,20 м	11,995	11,569	11,395	11,576	12,005

Разработано автором

Как видно из полученных результатов, значения влажности в центральной части бруска оказываются физически недостоверными. Это, по-видимому, обусловлено недостаточностью исходных данных о начальном распределении влажности вблизи центра образца. При добавлении одной экспериментально измеренной точки в центре бруска с начальной влажностью 22,3 % расчётная картина существенно изменяется (табл. 3):

$$a_{II} = 7,35 \cdot 10^{-4} \quad (79)$$

Таблица 3

Таблица влажности в % в различных точках сечения в начальный момент времени. Отсчет координат начинаем от левого нижнего края бруска. По сравнению с предыдущей таблицей тут добавлена влажность в центре сечения

x/y	0 м	0,05 м	0,10 м	0,15 м	0,20 м
0 м	12,001	12,062	12,087	12,061	11,999
0,05 м	12,062	17,191	19,279	17,103	11,938
0,10 м	12,087	19,31	22,251	19,187	11,913
0,15 м	12,062	17,191	19,28	17,104	11,938
0,20 м	12,001	12,062	12,088	12,061	11,999

Разработано автором

Полученные результаты существенно отличаются от предыдущих и согласуются с экспериментальными данными с погрешностью, не превышающей 20 %.

Обсуждение

По итогам выполненных исследований можно сделать следующие выводы:

- Автором получено решение уравнения влагопроводности, позволяющее определять влажность в любой точке сечения ортотропного деревянного элемента, открытого со всех сторон, в произвольный момент времени при заданном начальном распределении влажности.
- Точность оценки зависит от количества начальных точек измерений влажности. Необходимо несколько точек на поверхности и минимум одна точка внутри сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhao J. и др. Characterization of hygrothermal properties of two wood species- the impact of anisotropy on their thermal and moisture behaviors // Constr. Build. Mater. 2023. Т. 398. С. 132375. DOI 10.1016/j.conbuildmat.2023.132375.

2. Шубин Г.С. Физические основы и расчет процессов сушки древесины. Лесн. промышленность. Москва, 1973. С. 248. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01007103475> (дата обращения: 01.05.2026).
3. Шубин Г.С. Метод расчета длительности кондиционирующей обработки пиломатериалов после сушки // Лесной журнал. 1986. С. 60–67. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01014844772> (дата обращения: 01.05.2026).
4. Fick A. Ueber Diffusion // Ann. Phys. 1855. Т. 170, № 1. С. 59–86. DOI 10.1002/andp.18551700105.
5. Wood B.D., Ostvar S. Series Solutions for Orthotropic Diffusion in a Cube. 2015. URL: https://www.researchgate.net/publication/279968717_Series_Solutions_for_Orthotropic_Diffusion_in_a_Cube (дата обращения: 13.06.2026).
6. Чулицкий Н.Н. Исследование факторов и характеристик режимов сушки древесины. Москва-Ленинград, 1934. 88 с. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01009355977> (дата обращения: 01.05.2026).
7. Турковский С.Б., Ломакин А.Д., Погорельцев А.А. Зависимость состояния клееных деревянных конструкций от влажности окружающего воздуха // Промышленное и гражданское строительство. 2012. Т. 3. С. 30–32. DOI 10.33622/0869-7019. URL: <http://www.pgs1923.ru/> (дата обращения: 05.05.2026).
8. Серговский П.С. Расчет процессов высыхания и увлажнения древесины. Гослесбумиздат. Ленинград, 1952. 78 с. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01006021713> (дата обращения: 03.05.2026).
9. Anthony Peirce. Introductory lecture notes on Partial Differential Equations — Lecture 29: The heat equation with Robin BC [Электронный ресурс]. 2014. URL: <https://personal.math.ubc.ca/~ward/teaching/m316/lecture29.pdf> (дата обращения: 14.10.2025).
10. Marušić-Paloka E., Pažanin I. The Robin boundary condition for modelling heat transfer // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2024. Т. 480, № 2286. DOI 10.1098/rspa.2023.0850.
11. Johnsen J. Well-posed final value problems and Duhamel’s formula for coercive Lax-Milgram operators // Electronic Research Archive. 2019. Т. 27, № 0. С. 20–36. DOI 10.3934/era.2019008.
12. Lerman P., Scheepers G. Determination of a mass-transfer coefficient for wood drying by means of thermography // Wood Mater. Sci. Eng. 2023. Т. 18, № 6. С. 2104–2111. DOI 10.1080/17480272.2023.2243473.
13. Penvern H. и др. How Bound Water Regulates Wood Drying // Phys. Rev. Appl. 2020. Т. 14, № 5. С. 054051. DOI 10.1103/PhysRevApplied.14.054051.
14. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York, NY: Springer New York, 1983. Т. 44. DOI 10.1007/978-1-4612-5561-1.
15. Johnsen J. Well-posed final value problems and Duhamel’s formula for coercive Lax-Milgram operators // Electronic Research Archive. 2019. Т. 27, № 0. С. 20–36. DOI 10.3934/era.2019008.
16. Hahn, D. W., & Özisik, M. N. Use of Duhamel’s Theorem // Heat Conduction. Wiley, 2012. С. 273–299. DOI 10.1002/9781118411285.ch7.

17. Hahn D.W., Özişik M.N. Heat Conduction. Wiley, 2012. DOI 10.1002/9781118411285.
18. Arendt W., Warma M. The Laplacian with Robin Boundary Conditions on Arbitrary Domains // Potential Analysis. 2003. T. 19, № 4. C. 341–363. DOI 10.1023/A:1024181608863.
19. Zettl A. Sturm-Liouville Theory. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. T. 121. DOI 10.1090/surv/121.
20. Janssen H., Blocken B., Carmeliet J. Conservative modelling of the moisture and heat transfer in building components under atmospheric excitation // Int. J. Heat Mass Transf. 2007. T. 50, № 5–6. C. 1128–1140. DOI 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.06.048.
21. Zettl A. Sturm-Liouville Theory. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. T. 121. DOI 10.1090/surv/121.
22. Baskaya E. Asymptotics of eigenvalues for Sturm-Liouville problem including eigenparameter-dependent boundary conditions with integrable potential // New Trends in Mathematical Science. 2018. T. 3, № 6. C. 39–47. DOI 10.20852/ntmsci.2018.292.
23. Jakes J.E. и др. Effects of Moisture on Diffusion in Unmodified Wood Cell Walls: A Phenomenological Polymer Science Approach // Forests. 2019. T. 10, № 12. C. 1084. DOI 10.3390/f10121084.
24. Sánchez-Ferrer A., Engelhardt M., Richter K. Anisotropic wood–water interactions determined by gravimetric vapor sorption experiments // Cellulose. 2023. T. 30, № 6. C. 3869–3885. DOI 10.1007/s10570-023-05093-z.
25. Ouhabaz E.-M. Analysis of Heat Equations on Domains. (LMS-31). Princeton University Press, 2009. DOI 10.1515/9781400826483.
26. Arendt W., Warma M. The Laplacian with Robin Boundary Conditions on Arbitrary Domains // Potential Analysis. 2003. T. 19, № 4. C. 341–363. DOI 10.1023/A:1024181608863.
27. Frank R.L., Geisinger L. Semi-classical analysis of the Laplace operator with Robin boundary conditions // Bull. Math. Sci. 2012. T. 2, № 2. C. 281–319. DOI 10.1007/s13373-012-0028-5.
28. Maz'ya V. Sobolev Spaces. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. T. 342. DOI 10.1007/978-3-642-15564-2.
29. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York, NY: Springer New York, 1983. T. 44. DOI 10.1007/978-1-4612-5561-1.
30. Daners D. A Faber-Krahn inequality for Robin problems in any space dimension // Math. Ann. 2006. T. 335, № 4. C. 767–785. DOI 10.1007/s00208-006-0753-8.
31. Xu S. Predicted Residual Error Sum of Squares of Mixed Models: An Application for Genomic Prediction // G3 Genes|Genomes|Genetics. 2017. T. 7, № 3. C. 895–909. DOI 10.1534/g3.116.038059.
32. Hoerl A.E., Kennard R.W. Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems // Technometrics. 1970. T. 12, № 1. C. 55–67. DOI 10.1080/00401706.1970.10488634.

33. Hansen P.C., O’Leary D.P. The Use of the L-Curve in the Regularization of Discrete Ill-Posed Problems // SIAM Journal on Scientific Computing. 1993. Т. 14, № 6. С. 1487–1503. DOI 10.1137/0914086.
34. Golub G.H., Heath M., Wahba G. Generalized Cross-Validation as a Method for Choosing a Good Ridge Parameter // Technometrics. 1979. Т. 21, № 2. С. 215–223. DOI 10.1080/00401706.1979.10489751.
35. Hansen P.C. Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998. DOI 10.1137/1.9780898719697.
36. Boyce W.E. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Enhanced eText. Wiley, 2017. URL: <https://www.wiley.com/en-us/shop/general-introductory-mathematics/elementary-differential-equations-and-boundary-value-problems-11th-edition-p-9781119381648> (дата обращения: 13.06.2026).
37. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York, NY: Springer New York, 1983. Т. 44. DOI 10.1007/978-1-4612-5561-1.
38. Wu H. A variation-of-constants formula for a linear abstract evolution equation in Hilbert space // The ANZIAM Journal. 2003. Т. 44, № 4. С. 583–590. DOI 10.1017/S1446181100012943.
39. Johnsen J. Well-posed final value problems and Duhamel’s formula for coercive Lax–Milgram operators // Electronic Research Archive. 2019. Т. 27, № 0. С. 20–36. DOI 10.3934/era.2019008.

Moskalev Mihail Borisovich

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russia

E-mail: cosccc@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7810-6484>

RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=821085

Chernykh Alexander Grigorievich

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russia

E-mail: chagrigh@lan.spbgasu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9805-1428>

RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=473049

Solution of the moisture transfer differential equation using Fourier series expansion over a complete basis of sine and cosine functions

Abstract. This paper presents an analytical solution to the problem of transient two-dimensional moisture transfer in an orthotropic wooden element of rectangular cross-section with all faces open to moisture exchange with the surrounding environment. The relevance of the study is determined by the need for benchmark solutions suitable for analyzing moisture distribution over a wood cross-section and for verifying numerical methods used to simulate moisture transfer in timber structures. In contrast to existing approaches, which are mainly focused on a uniform initial moisture distribution and on determining the average moisture content over the cross-section, the present study derives a solution that makes it possible to determine the moisture content at an arbitrary point of the cross-section under a nonuniform initial moisture distribution. The mathematical model is based on the two-dimensional moisture diffusion equation with different diffusion coefficients along the coordinate directions and Robin boundary conditions on all sides of the domain. The solution is constructed by the method of separation of variables, with the unknown function expanded into a Fourier series in terms of the eigenfunctions of the corresponding Sturm-Liouville problem. Duhamel's principle is used to account for the effect of variable ambient moisture. A procedure is proposed for determining the initial modal coefficients from experimental moisture measurements at control points. The calculated results are compared with experimental data on the drying of a pine specimen with a 200×200 mm cross-section. It is shown that the accuracy of the calculation depends significantly on how completely the initial moisture distribution is specified, including the availability of measurements not only on the surface but also inside the cross-section. The obtained solution can be used as a benchmark for validating numerical models and analyzing the drying kinetics of orthotropic wooden elements.

Keywords: humidity; hydraulic conductivity; operation of wooden structures; moisture content; physical nonlinearity of the material; Fourier series; moisture transfer differential equation