

Вестник Евразийской науки / The Eurasian Scientific Journal <https://esj.today>

2026, Том 18, № 3 / 2026, Vol. 18, Iss. 3 <https://esj.today/issue-3-2026.html>

URL статьи: <https://esj.today/PDF/51SAVN326.pdf>

DOI: 10.15862/51SAVN326 (<https://doi.org/10.15862/51SAVN326>)

2.1.1. Строительные конструкции, здания и сооружения (технические науки)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Есипов, С. М. Влияние внешнего армирования композитными материалами на расчет прочности элементов, работающих при воздействии изгибающих и крутящих моментов / С. М. Есипов, С. И. Меркулов, С. О. Кашуба // Вестник евразийской науки. — 2026. — Т. 18. — № 3. — URL: <https://esj.today/PDF/51SAVN326.pdf>. DOI: 10.15862/51SAVN326.

For citation:

Esipov S.M., Merkulov S.I., Kashuba S.O. The effect of external reinforcement with composite materials on the calculation of the strength of elements operating under the influence of bending and torques. *The Eurasian Scientific Journal*. 2026;18(3): 51SAVN326. Available at: <https://esj.today/PDF/51SAVN326.pdf>. DOI: 10.15862/51SAVN326. (In Russ., abstract in Eng.).

УДК 69.07

Есипов Станислав Максимович

ФГБОУ ВО «Белгородский государственный технологический университет имени В. Г. Шухова», Белгород, Россия
Доцент кафедры «Строительства и городского хозяйства»
Кандидат технических наук
E-mail: bgtu@esipov-sm.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3170-0099>
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=772458

Меркулов Сергей Иванович

ФГБОУ ВО «Курский государственный университет», Курск, РФ
Заведующий кафедрой «Промышленного и гражданского строительства»
Доктор технических наук, профессор
E-mail: mersi.dom@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3680-8223>
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=382671

Кашуба Сергей Олегович

ФГБОУ ВО «Белгородский государственный технологический университет имени В. Г. Шухова», Белгород, Россия
Аспирант кафедры «Строительства и городского хозяйства»
E-mail: kashuba_serгей@mail.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=1201834

Влияние внешнего армирования композитными материалами на расчет прочности элементов, работающих при воздействии изгибающих и крутящих моментов

Аннотация. В данной статье представлен теоретический анализ работы внешнего композитного армирования в железобетонном элементе, подверженном изгибу с кручением. Теоретический анализ основан на проведенных натурных экспериментальных исследованиях. Актуальность работы обусловлена ростом числа реконструируемых объектов и недостаточностью исследования влияния внешнего композитного армирования, на элементы, подверженные изгибу с кручением. В ходе исследования проанализирован существующий метод расчет таких конструкций, который характеризуется двумя расчетными схемами: I — для нижней или верхней грани, при совместном действии изгибающих и крутящих моментов; II — для боковой

грани расчет, при совместном действии крутящих моментов и поперечной силы. Для обеих схем модифицированы формулы расчета предельных изгибающих и крутящих моментов, поперечных сил и длин проекций пространственных и наклонных трещин, учитывающие композитное армирование и нагрузку в момент усиления. Предельные усилия продольного композитного армирования ограничены гипотезой пропорциональности продольных деформаций, с ее же помощью реализован учет действующих нагрузок. Интенсивность усилий в хомутах внешнего композитного армирования ограничена деформациями стального армирования, которые определяются с учетом действующих нагрузок. Разработанная методика позволяет рассчитывать прочность усиленных конструкций в условиях сложного напряженно-деформированного состояния, что повышает надежность реконструируемых зданий и оптимизирует применение композитных материалов. Результатом приведенных материалов, является усовершенствование методики расчета железобетонных элементов, подверженных сложному напряженно-деформируемому состоянию — изгибу с кручением, учитывающей внешнее композитное армирование, которое выполняется при действующих уровнях нагружений.

Ключевые слова: железобетонные элементы; внешнее композитное армирование; сопротивление кручению с изгибом; сложное напряженно-деформированное состояние; пространственная трещина; усиление

Введение

В настоящее время ежегодно увеличивается объем ввода в эксплуатацию зданий и сооружений, при этом большой объем составляют объекты с длительным сроком эксплуатации, при наличии которых, неизбежно проведение масштабной реконструкции. При этом, реконструкция может выполняться только с целью усиления строительных конструкций или сопровождаться изменением объемно-планировочных решений, что влечет за собой изменение расчетных схем элементов здания. Таким образом, возникает необходимость усиления строительных конструкций, изначально работающих при сложном напряженном состоянии — изгибе с кручением, например краевые или консольные балки, а также, изгибаемых элементов, в которых, после изменения объемно планировочных решений, возникают крутящие моменты, например пролетные балки при исключении с одной стороны плит перекрытия или при размещении крупногабаритного оборудования в пролете между балками.

При усилении железобетонных элементов, в настоящее время, широко применяется метод внешнего армирования композитными материалами. Таким системам усиления присущи малые вес и размеры, стойкость к агрессивным воздействиям, простота технологии выполнения работ, что делает их применение экономически обоснованным.

На сегодняшний день выполнены экспериментально — теоретические исследования изгибаемых и сжатых элементов, усиленных внешним армированием композитными материалами. При этом практически отсутствуют исследования усиленных элементов при изгибе с кручением.

Таким образом, одной из актуальных задач исследований железобетонных элементов, усиленных внешним армированием композитными материалами, является задача совершенствования методики расчета прочности таких элементов, при изгибе с кручением, учитывающей начальные деформации.

Влияние внешнего композитного армирование при усилении изгибаемых железобетонных элементов, широко изучено и рекомендации по расчету таких конструкций имеются во многих странах, например СП 164.1325800.2014¹, ACI 440.2R-08², CNR-DT. 200/2004.³

Вопросам совместности работы элементов усиления и бетона, а также выбору оптимальных адгезионных составов, посвящен ряд исследований [1–5], Авторы делают заключения о необходимости достаточной анкеровки усиления за зону эффективной работы, качественной подготовки поверхности железобетонного элемента и обязательного учета предыстории нагружений.

Актуальность исследования заключается в необходимости разработки обоснованных научных методов усиления железобетонных конструкций композитными материалами при сложном напряженном состоянии. Несмотря на значительный прогресс в изучении поведения железобетонных конструкций при действии изгиба с кручением, а, как следствие, усовершенствование расчетных моделей [6–12], однако вопрос совместного действия, изгибающего и крутящего моментов для конструкций, усиленных внешним композитным армированием, требует дополнительного изучения.

В рамках задачи совершенствования методики расчета железобетонных элементов, усиленных внешним композитным армированием, были сформированы предварительные гипотезы его работы при изгибе с кручением [13], однако по результатам проведенных натурных экспериментальных исследований [14; 15], влияние внешнего композитного армирования уточнено и изложено в настоящей статье.

Материалы и методы

В общем случае согласно СП 63.13330.2018⁴, с учетом рекомендаций [16], расчет конструкций, подверженных изгибу с кручением, производится по пространственным сечениям. Для нижней или верхней грани расчет производится по схеме *I*, при совместном действии изгибающих и крутящих моментов из условия (1); для боковой грани расчет производится по схеме *II*, при совместном действии крутящих моментов и поперечной силы из условия (2).

$$\left(\frac{M_l}{M_0}\right)^2 + \left(\frac{T_l}{T_0}\right)^2 \leq 1. \quad (1)$$

$$\frac{Q_2}{Q_0} + \frac{T_2}{T_0} \leq 1. \quad (2)$$

Для расчетного сечения *I*, предельный изгибающий момент, воспринимаемый сечением, определяется по формуле 3; а предельный крутящий момент, воспринимаемый сечением, складывается из крутящих моментов, воспринимаемых поперечными хомутами и продольной арматурой, что записано в выражении (4).

¹ СП 164.1325800.2014 Усиление железобетонных конструкций композитными материалами. Правила проектирования / Министерство строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации. — М.: Стандартинформ, 2014. — 52 с.

² ACI 440.2R-08. Guide for the Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Concrete Structures / American concrete Institute (ACI). — 2008. — 78 p.

³ CNR-DT. 200/2004. Guide for the Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Existing Structures / National research council (CNR). — Rome: CNR, 2004. — 144 p.

⁴ СП 63.13330.2018 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения (СНиП 52-01-2003) / Министерство строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации. — М.: Стандартинформ, 2019. — 118 с.

$$M_0 = R_b \cdot b \cdot x \cdot (h_0 - 0,5 \cdot x) + R_{sc} \cdot A_{sc} \cdot (h_0 - a'). \quad (3)$$

$$T_0 = T_{sw1} + T_{s1} = 0,9 \cdot h \cdot q_{sw1} \cdot c \cdot \delta_1 + 0,9 \cdot h \cdot R_s \cdot A_{s1} \cdot \frac{b}{c}. \quad (4)$$

Для расчетного сечения II, предельная поперечная сила, воспринимаемая сечением, складывается из поперечных сил, воспринимаемых бетоном и поперечной арматурой в наклонном сечении, определяется выражением (5); а предельный крутящий момент, воспринимаемый сечением, складывается из крутящих моментов, воспринимаемых поперечными хомутами и продольной арматурой вдоль боковой грани, что записано в выражении (6).

$$Q_0 = Q_b + Q_{sw} = \frac{\varphi_{b2} \cdot R_{bt} \cdot b \cdot h_0^2}{c_Q} + \varphi_{sw} \cdot q_{sw2} \cdot c_Q. \quad (5)$$

$$T_0 = T_{sw2} + T_{s2} = 0,9 \cdot b \cdot q_{sw2} \cdot c \cdot \delta_2 + 0,9 \cdot b \cdot R_s \cdot A_{s2} \cdot \frac{h}{c}. \quad (6)$$

В формулах (1–6), обозначены:

M , T и Q — изгибающий момент, крутящий момент и поперечная сила; индексы I или 2 — слагаемые, относящиеся к I или II расчетным схемам;

R_b и R_{bt} — расчетное сопротивления бетона сжатию и растяжению;

R_s и R_{sc} — расчетное сопротивления арматуры растяжению и сжатию;

b — ширина рассматриваемого сечения;

x — высота сжатой зоны бетона;

h и h_0 — высота и рабочая высота сечения;

a и a' — защитный слой растянутой и сжатой арматуры;

A_s и A_{sc} — рабочая площадь растянутой и сжатой арматуры;

φ_{b2} и φ_{sw} — коэффициенты работы бетона и поперечного армирования в наклонном сечении;

δ_1 и δ_2 — параметры длины растянутой грани, пересекающейся спиральной пространственной трещиной, определяются как $b / (2 \cdot h + b)$ или $h / (2 \cdot b + h)$ при I или II расчетной схеме;

$0,9h$ и $0,9b$ — условное плечо внутренней пары сил при определении предельных крутящих моментов для I и II расчетных схем;

q_{sw} — интенсивность нагрузки в стержнях поперечного армирования растянутой грани, определяется формулой (7);

c — длина проекции пространственной трещины, определяется из выражения (8) для I расчетной схемы и из выражения (9) для II расчетной схемы;

c_Q — длина проекции наклонной трещины, определяется из выражения (10).

$$q_{sw} = \frac{R_{sw} \cdot A_{sw}}{s_{sw}}. \quad (7)$$

$$c = k_c \cdot c_0 \leq 2 \cdot h + b. \quad (8)$$

$$c = \sqrt{\frac{R_s \cdot A_{s2} \cdot (2 \cdot b + h)}{q_{sw2}}}. \quad (9)$$

$$c_Q = \sqrt{\frac{\varphi_{b2} \cdot R_{bt} \cdot b \cdot h_0^2}{\varphi_{sw} \cdot q_{sw2}}}. \quad (10)$$

В приведенных формулах:

R_{sw} — расчетное сопротивление поперечной арматуры растяжению;

A_{sw} и s_{sw} — площадь и шаг стержней поперечного армирования;

k_c — коэффициент длины проекции пространственной трещины, определяется из выражения (11), принимается не больше 1;

c_0 — предельная длина проекции пространственной трещины, определяется из выражения (12).

$$k_c = 1,2 - 0,4 \cdot \frac{M_1}{M_0} \leq 1. \quad (11)$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{R_s \cdot A_{s1} \cdot (2 \cdot h + b)}{q_{sw1}}}. \quad (12)$$

Длина проекции пространственной трещины c_0 , для предельного крутящего момента T_0 , определяется как производная dT_0/dc , которая приравнивается 0.

Условия совместной работы поперечного и продольного армирования (13, 14) для расчетной схемы I и (15, 16) для расчетной схемы II, представлены выражениями:

$$R_s \cdot A_{s1} < 2 \cdot q_{sw1} \cdot b. \quad (13)$$

$$q_{sw1} \cdot b \leq 1,5 \cdot R_s \cdot A_{s1}. \quad (14)$$

$$R_s \cdot A_{s2} \leq 2 \cdot q_{sw2} \cdot h. \quad (15)$$

$$q_{sw2} \cdot h \leq 1,5 \cdot R_s \cdot A_{s2}. \quad (16)$$

При выполнении условий (13) и (14), выражение (4) примет вид:

$$T_0 = 1,8 \cdot b \cdot h \cdot \sqrt{\frac{R_s \cdot A_{s1} \cdot q_{sw1}}{2 \cdot h + b}}. \quad (17)$$

При невыполнении условия (13), в расчете предельного крутящего момента (4), вместо $R_s \cdot A_{s1}$ учитывается $2 \cdot q_{sw1} \cdot b$, а выражения (4) и (12) приобретают вид:

$$T_0 = 1,8 \cdot b \cdot h \cdot q_{sw1} \cdot \sqrt{2 \cdot \delta_I}. \quad (18)$$

$$c_0 = b \cdot \sqrt{\frac{2}{\delta_I}}. \quad (19)$$

При невыполнении условия (14), в расчете предельного крутящего момента (4), вместо $q_{sw1} \cdot b$ учитывается $1,5 \cdot R_s \cdot A_{s1}$, а выражения (4) и (12) приобретают вид:

$$T_0 = 1,8 \cdot h \cdot R_s \cdot A_{s1} \cdot \sqrt{1,5 \cdot \delta_I}. \quad (20)$$

$$c_0 = \frac{b}{\sqrt{1,5 \cdot \delta_I}}. \quad (21)$$

При выполнении условий (15) и (16), выражение (6) примет вид:

$$T_0 = 1,8 \cdot b \cdot h \cdot \sqrt{\frac{R_s \cdot A_{s2} \cdot q_{sw2}}{2 \cdot b + h}}. \quad (22)$$

При невыполнении условия (15), в расчете предельного крутящего момента (6), вместо $R_s \cdot A_{s2}$ учитывается $2 \cdot q_{sw2} \cdot h$, а выражения (6) и (9) приобретают вид:

$$T_0 = 1,8 \cdot b \cdot h \cdot q_{sw2} \cdot \sqrt{2 \cdot \delta_2}. \quad (23)$$

$$c = h \cdot \sqrt{\frac{2}{\delta_2}}. \quad (24)$$

При невыполнении условия (16), в расчете предельного крутящего момента (6), вместо $q_{sw2} \cdot h$ учитывается $1,5 \cdot R_s \cdot A_{s2}$, а выражения (6) и (9) приобретают вид:

$$T_0 = 1,8 \cdot b \cdot R_s \cdot A_{s2} \cdot \sqrt{1,5 \cdot \delta_2}. \quad (25)$$

$$c = \frac{h}{\sqrt{1,5 \cdot \delta_2}}. \quad (26)$$

Основная часть

Для учета внешнего композитного армирования в железобетонной конструкции, работающей на изгиб с кручением, в расчет добавлены слагаемые напряжений, возникающих в элементах усиления.

Схемы распределения усилий, в пространственных сечениях, для обеих расчетных схем, с учетом внешнего композитного армирования, приведены на рисунке 1.

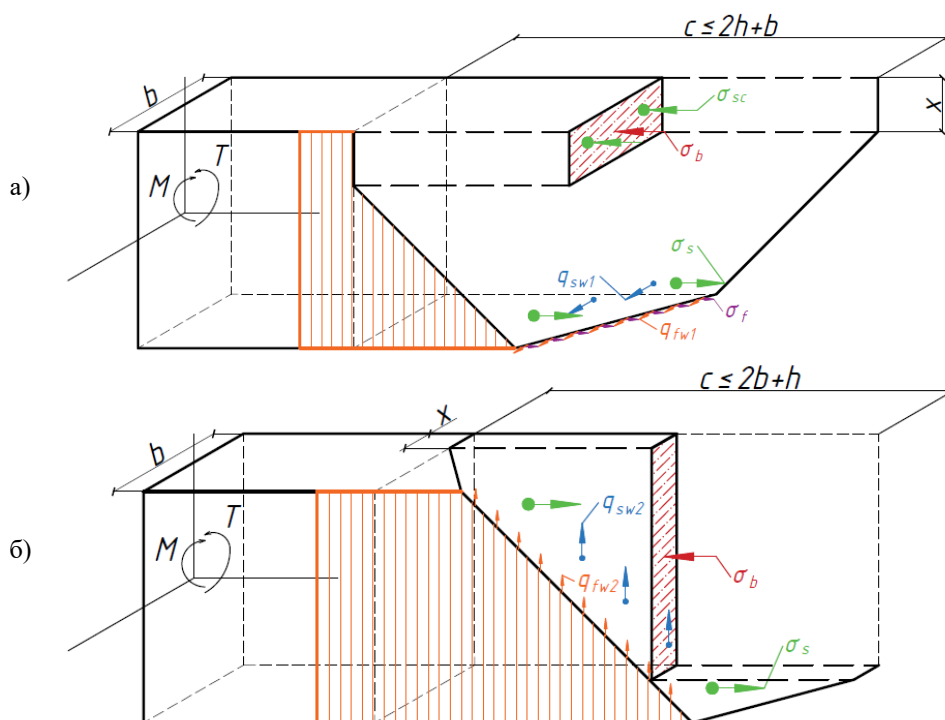


Рисунок 1. Схема распределения усилий, в пространственном сечении, железобетонного элемента, усиленного внешним композитным армированием по расчетным схемам: (а) I; (б) II (разработано авторами)

Для определения напряжений, в элементах пространственного сечения в расчетной схеме I, предложено воспользоваться гипотезой пропорциональности продольных деформаций, графическое описание которой приведено на рисунке 2. Согласно указанной гипотезе, деформации растяжения и сжатия относительно нейтральной линии сечения будут пропорциональны. Применяя данную гипотезу для усиленного сечения, получено выражение (27).

$$\frac{\varepsilon_b}{x} = \frac{\varepsilon_s}{h_0 - x} = \frac{\varepsilon_{sc}}{x - a'} = \frac{\varepsilon_f + \varepsilon_{bt,yc}}{h - x} \quad (27)$$

Где:

$\varepsilon_b, \varepsilon_s, \varepsilon_{sc}, \varepsilon_f$ — деформации бетона сжатой зоны, растянутой арматуры, сжатой арматуры, внешнего армирования;

$\varepsilon_{bt,yc}$ — деформации растянутой грани при поклейке композита усиления.

Для определения напряжений, значения относительных деформаций переводятся в напряжения, посредством принятых диаграмм деформирования.

Для принятых диаграмм деформирования: трехлинейной для бетона, двухлинейной для растянутой арматуры и линейной для растянутого бетона и внешнего композитного армирования, составлена система уравнений в пространственном сечении из суммы сил по оси x и уравнений пропорциональности продольных деформаций бетона, сжатой стальной арматуры и композитного армирования относительно растянутой арматуры:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_b \cdot b \cdot x + \sigma_{sc} \cdot A_{sc} - \sigma_s \cdot A_{sl} - \varphi_f \cdot \sigma_f \cdot A_f = 0 \\ \sigma_b = \frac{\sigma_s \cdot E_b \cdot x}{E_s \cdot (h_0 - x)} \text{ или } (1 - \frac{\sigma_{bl}}{R_b}) \cdot R_b \cdot \left[\frac{\sigma_s \cdot x}{E_s \cdot (h_0 - x) \cdot (\varepsilon_{b0} - \varepsilon_{bl})} - \frac{\varepsilon_{bl}}{\varepsilon_{b0} - \varepsilon_{bl}} \right] + \sigma_{bl} \\ \sigma_{sc} = \frac{\sigma_s \cdot (x - a')}{(h_0 - x)} \\ \sigma_f = \sigma_s \cdot \frac{E_f}{E_s} \cdot \frac{(h - x)}{(h_0 - x)} - \varepsilon_{bt,yc} \cdot E_f \end{array} \right. \quad (28)$$

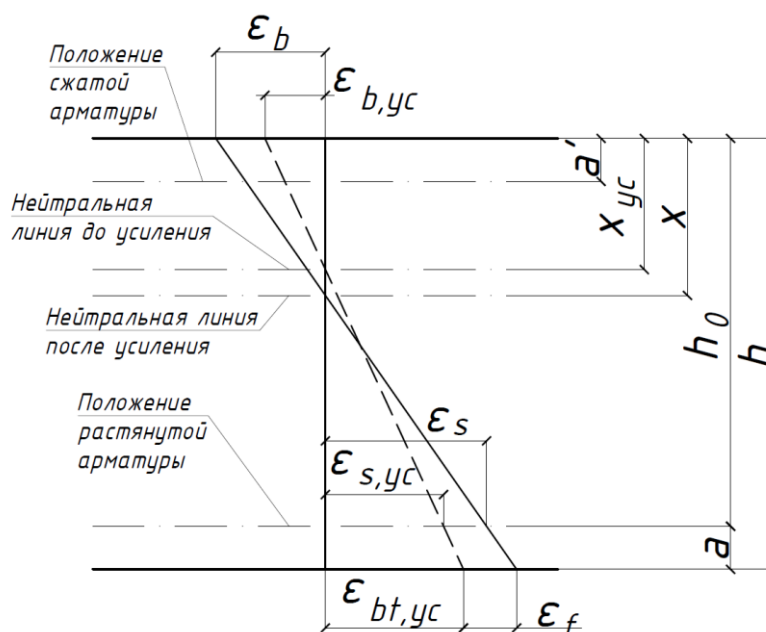


Рисунок 2. Распределение продольных деформаций для железобетонного элемента, усиленного внешним композитным армированием (разработано авторами)

Зависимость напряжений бетона отличается для разных стадий его работы, в первом случае — упругая, во втором — упруго-пластическая. В системе уравнений обозначены:

$\sigma_b, \sigma_s, \sigma_{sc}, \sigma_f$ — действующие напряжения в сжатом бетоне, растянутой и сжатой арматуре, в композитном армировании;

E_s, E_b, E_f — модули упругости стальной арматуры, бетона и композита;

$\sigma_{bl}, \varepsilon_{bl}, \varepsilon_{b0}$ — параметры диаграммы напряжения-деформации бетона;

A_f — площадь внешнего композитного армирования;

φ_f — поправочный коэффициент работы внешнего композитного армирования, для элементов, усиливаемых под нагрузкой принят 1,0, при усилении без предварительного нагружения — 0,5.

Для определения деформаций растянутой грани при поклейке композита усиления, предлагается составление системы уравнений в пространственном сечении из суммы сил по оси x , суммы изгибающих моментов относительно растянутой арматуры и уравнений пропорциональности продольных деформаций, сжатых бетона и арматуры относительно растянутой арматуры:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{b,yc} \cdot b \cdot x_{yc} + \sigma_{sc,yc} \cdot A_{sc} - \sigma_{s,yc} \cdot A_{sl} = 0 \\ \sigma_{b,yc} \cdot b \cdot x_{yc} \cdot (h_0 - 0,5 \cdot x_{yc}) + \sigma_{sc,yc} \cdot A_{sc} \cdot (h_0 - a') - M_{lyc} = 0 \\ \sigma_{b,yc} = \frac{\sigma_{s,yc} \cdot E_b \cdot x_{yc}}{E_s \cdot (h_0 - x_{yc})} \text{ или } (1 - \frac{\sigma_{bl}}{R_b}) \cdot R_b \cdot \left[\frac{\sigma_{s,yc} \cdot x_{yc}}{E_s \cdot (h_0 - x_{yc}) \cdot (\varepsilon_{b0} - \varepsilon_{bl})} - \frac{\varepsilon_{bl}}{\varepsilon_{b0} - \varepsilon_{bl}} \right] + \sigma_{bl} \\ \sigma_{sc,yc} = \frac{\sigma_{s,yc} \cdot (x_{yc} - a')}{(h_0 - x_{yc})} \end{array} \right. \quad (29)$$

Решая систему уравнений, определяются высота сжатой зоны бетона x_{yc} и напряжения растянутой арматуры $\sigma_{s,yc}$ при заданном уровне нагрузки в момент усиления M_{lyc} . Подставляя вычисленные значения высоты сжатой зоны и напряжений растянутой арматуры в уравнение пропорциональности продольных деформаций, определяются деформации растянутой грани при поклейке композита усиления, по формуле:

$$\varepsilon_{bt,yc} = \frac{\sigma_{s,yc} \cdot (h - x_{yc})}{E_s \cdot (h_0 - x_{yc})}. \quad (30)$$

С учетом включения внешнего армирования и действующих напряжений, в момент достижения одним из слагаемых расчетных сопротивлений, формула предельного изгибающего момента, воспринимаемого сечением (3), примет вид:

$$M_0 = \sigma_b \cdot b \cdot x \cdot (h_0 - 0,5 \cdot x) + \sigma_{sc} \cdot A_{sc} \cdot (h_0 - a') + \varphi_f \cdot \sigma_f \cdot A_f \cdot a. \quad (31)$$

В расчете на кручение, при расчетной схеме I , вместо условного плеча внутренней пары сил — $0,9 \cdot h$, принято расстояние от центра тяжести сжатой зоны до стального армирования — $h_0 - 0,5 \cdot x$, или композитного армирования — $h - 0,5 \cdot x$. Длина проекции пространственной трещины s в расчете предельного крутящего момента заменена выражением $k_c \cdot c_0$. В результате, при отсутствии усиления, в формулах определения предельного крутящего момента (17), (18) и (20), слагаемое $2 \cdot 0,9 \cdot h$ будет заменено слагаемым $(k_c + 1/k_c) \cdot (h_0 - 0,5 \cdot x)$.

Для обеспечения совместности работы внешнего композитного и внутреннего стального поперечного армирования, предложено ограничить предельные деформации композитных хомутов предельными деформациями стальных хомутов, с учетом наличия начальных деформаций.

Для определения начальных деформаций поперечного стального армирования, принято условие пропорциональности распределения усилий в пространственном сечении из соотношений (13) и (14). Введен коэффициент совместности работы поперечного и продольного стального армирования:

$$0,5 \leq k_{sw1} = \frac{q_{sw1} \cdot b}{R_s \cdot A_{s1}} \leq 1,5. \quad (32)$$

Коэффициент k_{sw1} ограничен приведенными величинами, при выходе за интервал, принимается граничное значение.

Интенсивность нагрузки в стальных хомутах от действующего кручения, для определения напряжений в поперечном армировании, выраженная из формулы (17), будет иметь вид:

$$q_{sw1,yc} = \frac{T_{lyc}}{\left(k_c + \frac{1}{k_c}\right) \cdot b \cdot (h_0 - 0,5 \cdot x_{yc}) \cdot \sqrt{\frac{\delta_1}{k_{sw1}}}}. \quad (33)$$

Выразив напряжения поперечного армирования через интенсивность нагрузки, вычтя ее из расчетного сопротивления хомутов, преобразуя напряжения стальной арматуры в напряжения композитного армирования через модули упругости, получено выражение, характеризующее предельные напряжения хомутов внешнего композитного армирования при расчетной схеме I:

$$\sigma_{fw1,ult} = \left[R_{sw} - \frac{T_{lyc} \cdot s_{sw1}}{\left(k_c + \frac{1}{k_c}\right) \cdot b \cdot (h_0 - 0,5 \cdot x_{yc}) \cdot \sqrt{\frac{\delta_1}{k_{sw1}}} \cdot A_{sw1}} \right] \cdot \frac{E_f}{E_s} \leq \sin \alpha \cdot R_{fw}. \quad (34)$$

В приведенных формулах:

T_{lyc} — крутящий момент в рассматриваемом сечении в момент усиления;

R_{fw} — расчетное сопротивление композитных хомутов;

α — угол поклейки композитных хомутов, относительно продольной оси.

Для боковой грани, при расчетной схеме II, помимо кручения, стальные хомуты воспринимают поперечную силу. Коэффициент совместности работы поперечного и продольного стального армирования будет определяться формулой (35). Приняв распределение усилий от поперечной силы между бетоном и стальными хомутами пропорционально предельным, введено выражение (36).

$$0,5 \leq k_{sw2} = \frac{q_{sw2} \cdot h}{R_s \cdot A_{s2}} \leq 1,5. \quad (35)$$

$$q_{sw2,yc} = \frac{Q_{2yc}}{\left(1 + \frac{Q_b}{Q_{sw}}\right) \cdot \varphi_{sw} \cdot c_Q} + \frac{T_{2yc}}{1,8 \cdot b \cdot h \cdot \sqrt{\frac{\delta_2}{k_{sw2}}}}. \quad (36)$$

Выразив напряжения поперечного армирования через интенсивность нагрузки, вычтя ее из расчетного сопротивления хомутов, преобразуя напряжения стальной арматуры в напряжения композитного армирования через модули упругости, получено выражение, характеризующее предельные напряжения хомутов внешнего композитного армирования боковой грани:

$$\sigma_{fw2,ult} = \left[R_{sw} - \frac{s_{sw2}}{A_{sw2}} \cdot \left[\frac{Q_{2yc}}{\left(1 + \frac{Q_b}{Q_{sw}}\right) \cdot \varphi_{sw} \cdot c_Q} + \frac{T_{2yc}}{1,8 \cdot b \cdot h \cdot \sqrt{\frac{\delta_2}{k_{sw2}}}} \right] \right] \cdot \frac{E_f}{E_s} \leq \sin \alpha \cdot R_{fw}. \quad (37)$$

В приведенных формулах:

T_{2yc} и Q_{2yc} — крутящий момент и поперечная сила в рассматриваемом сечении в момент усиления;

Q_b и Q_{sw} — предельные поперечные силы, воспринимаемые бетоном и поперечным армированием сечения.

Из ограничения совместности деформирования композитного и стального армирования, интенсивность нагрузки в стержнях поперечного армирования для *I* и *II* расчетных схем, определяются из условий:

$$q_{fw1} = \frac{\sigma_{fw1,ult} \cdot A_{fw1}}{s_{fw1}}. \quad (38)$$

$$q_{fw2} = \frac{\sigma_{fw2,ult} \cdot A_{fw2}}{s_{fw2}}. \quad (39)$$

Где:

A_{fw} и s_{fw} — площадь и шаг хомутов внешнего поперечного армирования.

Ввиду ограничения деформаций композитного армирования, деформациями стального армирования, условия пропорциональности (13–16) при включении композитного усиления, будут соблюдаться в составном сечении. На основании этого, условия пропорциональности распределения продольных и поперечных усилий в пространственных сечениях, для *I* и *II* расчетных схем:

$$R_s \cdot A_{s1} + \sigma_f \cdot A_{f1} \leq 2 \cdot (q_{sw1} + q_{fw1}) \cdot b. \quad (40)$$

$$(q_{sw1} + q_{fw1}) \cdot b \leq 1,5 \cdot (R_s \cdot A_{s1} + \sigma_f \cdot A_{f1}). \quad (41)$$

$$R_s \cdot A_{s2} \leq 2 \cdot (q_{sw2} + q_{fw2}) \cdot h. \quad (42)$$

$$(q_{sw2} + q_{fw2}) \cdot h \leq 1,5 \cdot R_s \cdot A_{s2}. \quad (43)$$

В выражениях (42) и (43) не фигурирует слагаемое $\sigma_f A_{f2}$ характеризующее продольное композитное армирование боковой грани, по причине отсутствия соответствующих решений в практике проектирования.

Дополнительно, в расчет введены коэффициенты приведения композитного армирования к стальному:

$$k_{\sigma1} = \frac{\sigma_f \cdot A_f}{R_s \cdot A_{s1}}. \quad (44)$$

$$k_{q1} = \frac{q_{fw1}}{q_{sw1}}. \quad (45)$$

$$k_{q2} = \frac{q_{fw2}}{q_{sw2}}. \quad (46)$$

При включении в уравнение предельного крутящего момента (4) слагаемых внешнего композитного армирования, получено выражение:

$$T_0 = T_{s1} + T_{f1} + T_{sw1} + T_{fw1} = (h_0 - 0,5 \cdot x) \cdot R_s \cdot A_{s1} \cdot \frac{b}{c} + \\ + (h - 0,5 \cdot x) \cdot \sigma_f \cdot A_{f1} \cdot \frac{b}{c} + (h_0 - 0,5 \cdot x) \cdot q_{sw1} \cdot c \cdot \delta_1 + (h - 0,5 \cdot x) \cdot q_{fw1} \cdot c \cdot \delta_1. \quad (47)$$

Дифференцируя выражение (47) по длине пространственной трещины, приравнявая его к 0, а также выражая интенсивность нагрузки в композитном армировании через стальное армирование, определяется значение c_0 :

$$\frac{dT_0}{dc} = -(h_0 - 0,5 \cdot x) \cdot R_s \cdot A_{s1} \cdot \frac{b}{c^2} - (h - 0,5 \cdot x) \cdot k_{\sigma l} \cdot R_s \cdot A_{s1} \cdot \frac{b}{c^2} + (h_0 - 0,5 \cdot x) \cdot q_{sw1} \cdot \delta_l + (h - 0,5 \cdot x) \cdot k_{q1} \cdot q_{sw1} \cdot \delta_l = 0. \quad (48)$$

Таким образом, максимальная длина пространственной трещины и предельное сопротивление кручению, при расчетной схеме I, определяются формулами:

- при совместной работе продольного и поперечного армирования:

$$c_0 = \sqrt{\frac{b \cdot R_s \cdot A_{s1}}{\delta_1 \cdot q_{sw1}}} \cdot \sqrt{\frac{(h_0 - 0,5 \cdot x) \cdot (1 + k_{\sigma 1}) + a \cdot k_{\sigma 1}}{(h_0 - 0,5 \cdot x) \cdot (1 + k_{q1}) + a \cdot k_{q1}}}. \quad (49)$$

$$T_0 = \left(k_c + \frac{I}{k_c}\right) \cdot b \cdot \sqrt{(h_0 - 0,5 \cdot x) \cdot (1 + k_{\sigma l}) + a \cdot k_{\sigma l}} \cdot \sqrt{(h_0 - 0,5 \cdot x) \cdot (1 + k_q) + a \cdot k_q} \cdot \sqrt{\frac{R_s \cdot A_{s1} \cdot q_{sw1}}{2 \cdot h + b}}. \quad (50)$$

- при ограничении прочности пространственного сечения поперечным армированием:

$$c_0 = b \cdot \sqrt{\frac{2}{\delta_1}}. \quad (51)$$

$$T_0 = \left(k_c + \frac{I}{k_c}\right) \cdot b \cdot q_{sw1} \cdot \sqrt{2 \cdot \delta_1} \cdot [(h_0 - 0,5 \cdot x) \cdot (1 + k_q) + a \cdot k_q]. \quad (52)$$

- при ограничении прочности пространственного сечения продольным армированием:

$$c_0 = \frac{b}{\sqrt{1,5 \cdot \delta_l}}. \quad (53)$$

$$T_0 = \left(k_c + \frac{I}{k_c}\right) \cdot R_s \cdot A_{s1} \cdot \sqrt{1,5 \cdot \delta_l} \cdot [(h_0 - 0,5 \cdot x) \cdot (1 + k_{\sigma l}) + a \cdot k_{\sigma l}]. \quad (54)$$

При включении в уравнение предельного крутящего момента (6) слагаемых внешнего композитного армирования, получено выражение:

$$T_0 = T_{s2} + T_{sw2} + T_{fw2} = 0,9 \cdot b \cdot R_s \cdot A_{s2} \cdot \frac{h}{c} + 0,9 \cdot b \cdot q_{sw2} \cdot c \cdot \delta_2 + 0,9 \cdot b \cdot q_{fw2} \cdot c \cdot \delta_2. \quad (55)$$

Дифференцируя выражение (55) по длине пространственной трещины, приравнявая его к 0, а также выражая интенсивность нагрузки в композитном армировании через стальное армирование, определяется значение c :

$$\frac{dT_0}{dc} = -0,9 \cdot b \cdot R_s \cdot A_{s2} \cdot \frac{h}{c^2} + 0,9 \cdot b \cdot q_{sw2} \cdot \delta_2 + 0,9 \cdot b \cdot q_{fw2} \cdot k_{q2} \cdot c \cdot \delta_2 = 0. \quad (56)$$

Максимальная длина пространственной трещины и предельное сопротивление кручению, при расчетной схеме II, определяется формулами:

- при совместной работе продольного и поперечного армирования:

$$c = \sqrt{\frac{R_s \cdot A_{s2} \cdot (2 \cdot b + h)}{q_{sw2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + k_{q2}}} \quad (57)$$

$$T_0 = 1,8 \cdot b \cdot h \cdot \sqrt{\frac{R_s \cdot A_{s2} \cdot q_{sw2}}{2 \cdot b + h}} \cdot \sqrt{1 + k_{q2}} \quad (58)$$

- при ограничении прочности пространственного сечения поперечным армированием:

$$c = h \cdot \sqrt{\frac{2}{\delta_2}} \quad (59)$$

$$T_0 = 1,8 \cdot b \cdot h \cdot q_{sw2} \cdot \sqrt{2 \cdot \delta_2} \cdot (1 + k_{q2}) \quad (60)$$

- при ограничении прочности пространственного сечения продольным армированием:

$$c = \frac{h}{\sqrt{1,5 \cdot \delta_2}} \quad (61)$$

$$T_0 = 1,8 \cdot b \cdot R_s \cdot A_{s2} \cdot \sqrt{1,5 \cdot \delta_2} \quad (62)$$

При расчете наклонного сечения на действие поперечных сил и крутящих моментов, предельная поперечная сила (7), с учетом внешнего композитного армирования, будет определяться по формуле:

$$Q_0 = Q_{bl} + Q_{sw2} + Q_{fw2} = \frac{\varphi_{b2} \cdot R_{bt} \cdot b \cdot h_0^2}{c_Q} + \varphi_{sw} \cdot q_{sw2} \cdot c_Q + \psi_{fw} \cdot q_{fw2} \cdot c_Q \quad (63)$$

Где ψ_{fw} — коэффициент работы поперечного композитного внешнего армирования в наклонном сечении, принимается в зависимости от способа поклейки по СП 164.1325800.2014.⁵

Дифференцируя выражение (63) по длине пространственной трещины, приравнявая его к 0, а также выражая интенсивность нагрузки в композитном армировании через стальное армирование, определяется значение c_Q :

$$\frac{dQ_0}{dc} = -\frac{\varphi_{b2} \cdot R_{bt} \cdot b \cdot h_0^2}{c_Q^2} + \varphi_{sw} \cdot q_{sw2} + \psi_{fw} \cdot k_{q2} \cdot q_{sw2} = 0 \quad (64)$$

Таким образом, максимальная длина наклонной трещины, при расположении сжатой зоны параллельно плоскости изгиба, определяется по условию:

$$c_Q = \sqrt{\frac{\varphi_{b2} \cdot R_{bt} \cdot b \cdot h_0^2}{q_{sw2} \cdot (\varphi_{sw} + \psi_{fw} \cdot k_{q2})}} \quad (65)$$

Выводы

Для учета внешнего армирования композитными материалами, при расчете железобетонных элементов, работающих при действии изгибающих и крутящих моментов, предложено:

⁵ СП 164.1325800.2014 Усиление железобетонных конструкций композитными материалами. Правила проектирования / Министерство строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации. — М.: Стандартинформ, 2014. — 52 с.

- Ограничение интенсивности усилий в поперечном внешнем композитном армировании, интенсивностью усилий в поперечном стальном армировании, с учетом нагрузки в момент усиления, через деформации.
- Модификация формул определения предельных крутящих моментов и длин проекций пространственных трещин, которые учитывают внешнее композитное армирование и нагрузку в момент усиления.
- Модификация формул определения поперечных сил и длин наклонных трещин, которые учитывают внешнее композитное армирование и нагрузку в момент усиления.
- Модификация формул определения предельных изгибающих моментов, которые учитывают внешнее композитное армирование, нагрузку в момент усиления и неравномерность достижения расчетных сопротивлений элементов сечения.

Результатом приведенных материалов, является усовершенствование методики расчета железобетонных элементов, подверженных сложному напряженно-деформируемому состоянию — изгибу с кручением, учитывающей внешнее композитное армирование, которое выполняется при действующих уровнях нагрузжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецова, М. С. Особенности расчета железобетонных изгибаемых элементов, усиленных композитными материалами / М. С. Кузнецова, М. В. Попова // Дни науки студентов ИАСЭ — 2021: Материалы научно-практической конференции, Владимир, 22 марта — 09 2021 года. — Владимир: Владимирский государственный университет, 2021. С. 178–181. — EDN QMWBAV.
2. Гаврилова, Е. О. Усиление изгибаемых элементов композиционными материалами / Е. О. Гаврилова // Академическая публицистика. 2021. № 8-2. С. 111–119. — EDN LKCCUZ.
3. Волик, А. Р. Экспериментальные исследования железобетонных балок с внешним армированием растянутой грани композитными тканями / А. Р. Волик, Я. Я. Новицкий // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 6. Техника. 2022. Т. 12. № 1. С. 117–125. — EDN UPPKRI.
4. Исследование физико-механических характеристик модифицированных клеевых связующих для систем внешнего армирования строительных конструкций / И. А. Старовойтова, А. Р. Шакиров, Е. С. Зыкова [и др.] // Строительные материалы. 2021. № 1-2. С. 98–104. — DOI 10.31659/0585-430X-2021-788-1-2-98-104. — EDN QALRTB.
5. Карась, М. С. Экспериментальные исследования несущей способности железобетонных балок, усиленных композитными тканями в середине пролёта / М. С. Карась, Р. О. Кушель // Традиции, современные проблемы и перспективы развития строительства: Сборник научных статей, Гродно, 13–14 мая 2021 года. — Гродно: Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, 2021. С. 122–125. — EDN EIJWRR.
6. Колчунов, В. И. Гипотезы о депланации сечения от деформаций сдвига в железобетонных конструкциях, испытывающих кручение с изгибом / В. И. Колчунов // Строительство и реконструкция. — 2022. — № 2(100). — С. 3–12. — DOI 10.33979/2073-7416-2022-100-2-3-12. — EDN AFMPCA.

7. Колчунов, В. И. Обобщенные гипотезы депланации линейных и угловых деформаций в железобетонных конструкциях при изгибе с кручением / В. И. Колчунов // Научный журнал строительства и архитектуры. — 2023. — № 1(69). — С. 9–26. — DOI 10.36622/VSTU.2023.69.1.001. — EDN UEDCTP.
8. Nguyen, T.A. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete beams subjected to combined actions / Nguyen T.A., Nguyen Q.H., Somja H. // CIGOS 2019, Innovation for Sustainable Infrastructure. — 2020. — Pp. 173–178. — DOI:10.1007/978-981-15-0802-8_24.
9. Nguyen, T.A. Nonlinear analysis of RC members subjected to combined bending–shear–torsion stresses: a numerical multifiber displacement-based finite element model with warping / Nguyen T.A., Nguyen Q.H., Somja H. // Acta Mechanica. — 2021. — No.232(3). — Pp. 1–24. — DOI:10.1007/s00707-021-02966-x.
10. Nguyen, T.A. Non-linear finite element analysis of reinforced concrete members under torsion / Nguyen T.A., Nguyen Q.H., Somja H. // Conference: fib Symposium 2019: Concrete innovations in materials, design and structures. — 2019. — Pp. 897–904.
11. Rahal, K.N. A unified approach to shear and torsion in reinforced concrete / Rahal K.N. // Structural Engineering and Mechanics. — 2021. — Vol. 77, No. 5. — Pp. 691–703. — DOI: 10.12989/sem.2021.77.5.691.
12. Rahal, K.N. Torsional strength of normal and high strength reinforced concrete beams / Rahal K.N. // Engineering structures. — 2013. — No. 56. — Pp. 2206–2216. — DOI:10.1016/j.engstruct.2013.09.005.
13. Меркулов, С. И. Предварительное описание работы железобетонных элементов с внешним армированием композитными материалами при изгибе с кручением / С. И. Меркулов, С. М. Есипов, С. О. Кашуба // Вестник Белгородского государственного технологического университета имени В. Г. Шухова. — 2022. — № 11. — С. 40–48. — DOI 10.34031/2071-7318-2022-7-11-40-48. — EDN EFOFCS.
14. Экспериментальные исследования деформативности железобетонных конструкций с внешним композитным армированием при изгибе с кручением / С. М. Есипов, С. И. Меркулов, С. О. Кашуба [и др.] // Вестник евразийской науки. — 2025. — Т. 17, № 5. — EDN NDYATR.
15. Меркулов, С. И. Экспериментальные исследования прочности железобетонных конструкций с внешним композитным армированием при изгибе с кручением / С. И. Меркулов, С. М. Есипов, С. О. Кашуба // Эксперт: теория и практика. — 2026. — № 1(32). — С. 65–71. — DOI 10.51608/26867818_2026_1_65. — EDN CCQDVO.
16. Кодыш Э. Н., Никитин И. К., Трекин Н. Н. Расчет железобетонных конструкций из тяжелого бетона по прочности, трещиностойкости и деформациям. — Монография. М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2010. — 352 с.

Esipov Stanislav Maksimovich

Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov, Belgorod, Russia

E-mail: bgtu@esipov-sm.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3170-0099>

RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=772458

Merkulov Sergey Ivanovich

Kursk State University, Kursk, Russia

E-mail: mersi.dom@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3680-8223>

RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=382671

Kashuba Sergey Olegovich

Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov, Belgorod, Russia

E-mail: kashuba_sergey@mail.ru

RSCI: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=1201834

The effect of external reinforcement with composite materials on the calculation of the strength of elements operating under the influence of bending and torques

Abstract. This article presents a theoretical analysis of the operation of external composite reinforcement in a reinforced concrete element subject to bending with torsion. The theoretical analysis is based on the conducted field experimental studies. The relevance of the work is due to the growing number of reconstructed objects and the lack of research on the effect of external composite reinforcement on elements subject to bending with torsion. In the course of the study, the existing calculation method for such structures is analyzed, which is characterized by two calculation schemes: I — for the lower or upper face, with the combined action of bending and torques; II — for the lateral face, with the combined action of torques and transverse force. Formulas for calculating the maximum bending and torques, transverse forces, and projection lengths of spatial and inclined cracks have been modified for both schemes, taking into account composite reinforcement and the load at the moment of reinforcement. The limiting forces of longitudinal composite reinforcement are limited by the hypothesis of proportionality of longitudinal deformations, with its help, effective loads are taken into account. The intensity of the forces in the clamps of the external composite reinforcement is limited by the deformations of the steel reinforcement, which are determined taking into account the operating loads. The developed technique makes it possible to calculate the strength of reinforced structures in conditions of a complex stress-strain state, which increases the reliability of reconstructed buildings and optimizes the use of composite materials. The result of these materials is an improvement in the calculation methodology for reinforced concrete elements subject to a complex stress-strain state — bending with torsion, taking into account the external composite reinforcement, which is performed at current stress levels.

Keywords: reinforced concrete structures; external composite reinforcement; resistance to bending torsion; deformability; complex stress-strain state; spatial crack; reinforcement