Вестник Евразийской науки / The Eurasian Scientific Journal https://esj.today

2018, №4, Том 10 / 2018, No 4, Vol 10 https://esj.today/issue-4-2018.html

URL статьи: https://esj.today/PDF/51SAVN418.pdf

Статья поступила в редакцию 15.08.2018; опубликована 03.10.2018

Ссылка для цитирования этой статьи:
Ижендеев А.В. Вычисление критического параметра многопараметрической нагрузки, сжимающей тонкостенный стержень открытого профиля // Вестник Евразийской науки, 2018 №4, https://esj.today/PDF/51SAVN418.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

For citation:
Izhendeev A.V. (2018). Calculation of the critical factor of a multi-parameter load compressing a thin-walled rod with an open profile. *The Eurasian Scientific Journal*, [online] 4(10). Available at: https://esj.today/PDF/51SAVN418.pdf (in Russian)

УДК 624.04

ГРНТИ 67.03.03

Ижендеев Алексей Валерьевич
ФГБОУ ВО «Дальневосточный государственный аграрный университет», Благовещенск, Россия
Доцент кафедры «Строительного производства и инженерных конструкций»
Кандидат технических наук
E-mail: alex_izhendeev@mail.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=330820

Вычисление критического параметра многопараметрической нагрузки, сжимающей тонкостенный стержень открытого профиля

Аннотация. В статье объектом исследования является тонкостенный стержень открытого профиля. Приняты два геометрических допущения В.З. Власова:

1. профильная линия поперечного сечения тонкостенного стержня открытого профиля является недеформируемой в плоскости этого сечения;
2. деформации сдвига срединной поверхности тонкостенного стержня открытого профиля равны нулю. Материал стержня соответствует закону Р. Гука.

Стержень сжат многопараметрической нагрузкой. Судить об устойчивости стержня можно, используя критический параметр нагрузки. Известно, что критический параметр многопараметрической нагрузки можно вычислять с использованием формулы Папковича-Фёппля. Эта формула зависит от критических значений каждого параметра нагрузки. Изменение размеров поперечного сечения стержня может приводить к изменению критических значений параметров нагрузки. Эти критические значения могут изменяться и при наложении на стержень дополнительных связей. Вычисление абсолютно всех измененных критических значений требует большого количества вычислений. В связи с этим актуальным является уменьшение количества таких вычислений. Автором представлена модификация формулы Папковича-Фёппля. Эта модификация позволяет учесть изменение размеров поперечного сечения стержня и наложение на стержень дополнительных связей. Модификация предполагает вычисление собственного значения пары матриц только один раз. В представленной статье используется матрица начальных напряжений (геометрической жесткости), предложенная автором в его ранней работе. Элементы этой матрицы получены с использованием энергетического критерия устойчивости (вариационного принципа) Дж. Брайана и Е. Трефтца.

Представленная модификация формулы Папковича-Фёппля может использоваться при оптимизации размеров поперечного сечения сжатого тонкостенного стержня открытого профиля.

Ключевые слова: тонкостенный стержень; открытый профиль; сжатие; многопараметрическая нагрузка; устойчивость; критический параметр нагрузки; метод конечных элементов; матрица начальных напряжений

1. Постановка задачи

В данной работе объектом исследования является тонкостенный стержень открытого профиля.

Примем геометрические допущения В.З. Власова о деформировании такого стержня [1]:

1. профильная линия поперечного сечения тонкостенного стержня открытого профиля является недеформируемой в плоскости этого сечения;
2. деформации сдвига срединной поверхности тонкостенного стержня открытого профиля равны нулю. Материал стержня соответствует закону Р. Гука.

Полагаем, что материал стержня соответствует закону Р. Гука (R. Hooke) [2].

Полагаем, что стержень сжат квазистатической многопараметрической нагрузкой. Такая нагрузка характеризуется параметрами λ_i $(i=\overline{1,\ n})$, где n – количество этих параметров. Эти параметры образуют вектор $\vec{\lambda}$.

Судить об устойчивости стержня можно, используя критический параметр нагрузки. Известно, что критический параметр λ_{cr} многопараметрической нагрузки можно вычислять с использованием формулы Папковича-Фёппля (Föppl) [3-6]:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{cr}}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_{i,\text{cr}}}, \qquad (1)$$

где λ_i – i -й параметр нагрузки; $\lambda_{i,\text{cr}}$ – критическое значение i -го параметра нагрузки, если остальные параметры нагрузки равны нулю; n – количество параметров нагрузки.

При оптимизации размеров поперечного сечения стержня эти размеры могут изменяться. Такие изменения могут приводить в свою очередь к изменению критических значений параметров нагрузки. Эти критические значения могут изменяться и при наложении на стержень дополнительных связей.

Требуется модифицировать формулу (1) так, чтобы учесть изменение размеров поперечного сечения стержня (а также наложение на стержень дополнительных связей).

2. Метод решения задачи

Критический параметр λ_{cr} нагрузки можно определить методом конечных элементов как наименьший положительный корень λ уравнения (2) при $\vec{q}\neq 0$:

$$(K^{\text{tot}}-\lambda K_{\sigma}^{\text{tot}})\vec{q}=0, \qquad (2)$$

где K^{tot} и K_{σ}^{tot} – матрицы соответственно жесткости и начальных напряжений (геометрической жесткости) стержня; $\vec{q}$ – вектор перемещений, описывающих переход

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

системы из начального состояния равновесия до потери системой устойчивости в новое состояние равновесия.

Матрицы K^{tot} и K_{σ}^{tot} формируются из одноименных матриц отдельных конечных элементов.

Формулы для вычисления элементов матрицы жесткости отдельного конечного элемента широко известны. Они приведены, например, в работе Д.В. Бычкова [7].

Формулы для вычисления элементов матрицы начальных напряжений (геометрической жесткости) отдельного конечного элемента содержатся в работе А.В. Ижендеева [8]. Эти формулы получены на основе энергетического критерия устойчивости (вариационного принципа) Дж. Брайана (G. Bryan) [9] и Е. Трефтца (E. Trefftz) [10].

Согласно работе [8] формула для вычисления элемента матрицы начальных напряжений (геометрической жесткости), если этот элемент стоит в строке i и столбце j, может быть записана в виде

$$k_{\sigma,i,j} = Nl^{k}\left(a + \sum_{m} b_m\right), \tag{3}$$

где N – продольная сила; l – длина конечного элемента; k – целое положительное число; a – действительное число, не зависящее от размеров поперечного сечения стержня; b_m – действительное число, прямо пропорциональное одной из дробей (4).

Запишем эти дроби:

$$\frac{a_y}{l},\ \frac{a_z}{l},\ \frac{a_y^2}{l^2},\ \frac{a_z^2}{l^2},\ \frac{i_y^2}{l^2},\ \frac{i_z^2}{l^2},\ \frac{(I_{\omega}/A)}{l^4}, \tag{4}$$

где a_y и a_z – координаты центра изгиба поперечного сечения стержня, отсчитываемые вдоль главных центральных осей Y и Z поперечного сечения стержня; i_y и i_z – радиусы инерции поперечного сечения стержня относительно главных центральных осей Y и Z поперечного сечения стержня; I_{ω} – секториальный момент инерции поперечного сечения стержня; A – площадь поперечного сечения стержня.

Утверждение 1. Так как характерный размер поперечного сечения стержня (ширина или высота профиля) мал по сравнению с длиной стержня [1], то малы и дроби (4).

Приведем соответствующее уравнению (2) отношение Дж. Релея (J. Rayleigh) [11]:

$$r = \frac{\vec{q}^{\,\mathrm{T}} K^{\text{tot}} \vec{q}}{\vec{q}^{\,\mathrm{T}} K_{\sigma}^{\text{tot}} \vec{q}}. \tag{5}$$

Обратная величина [12]

$$\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\vec{q}^{\,\mathrm{T}} K_{\sigma,i}^{\text{tot}} \vec{q}}{\vec{q}^{\,\mathrm{T}} K^{\text{tot}} \vec{q}} \approx \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{1}{\lambda_{i,\text{cr}}}. \tag{6}$$

Для любых возможных i и j очевидно справедливо отношение

$$\frac{\lambda_{j,\text{cr}}}{\lambda_{i,\text{cr}}} \approx \frac{\vec{q}^{\,\mathrm{T}} K_{\sigma,i}^{\text{tot}} \vec{q}}{\vec{q}^{\,\mathrm{T}} K^{\text{tot}} \vec{q}} : \frac{\vec{q}^{\,\mathrm{T}} K_{\sigma,j}^{\text{tot}} \vec{q}}{\vec{q}^{\,\mathrm{T}} K^{\text{tot}} \vec{q}} = \frac{\vec{q}^{\,\mathrm{T}} K_{\sigma,i}^{\text{tot}} \vec{q}}{\vec{q}^{\,\mathrm{T}} K_{\sigma,j}^{\text{tot}} \vec{q}}. \tag{7}$$

51SAVN418
Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Из выражений (3), (7) и утверждения 1 следует утверждение 2.

Утверждение 2. При достаточно малом изменении размеров поперечного сечения сжатого тонкостенного стержня открытого профиля отношение $\lambda_{j,\mathrm{cr}} / \lambda_{i,\mathrm{cr}}$ остается практически неизменным.

Кроме того, так как правая часть выражения (7) не содержит матрицу K^{tot} жесткости стержня, то справедливо утверждение 3: при наложении на сжатый тонкостенный стержень открытого профиля дополнительных связей отношение $\lambda_{j,\mathrm{cr}} / \lambda_{i,\mathrm{cr}}$ остается практически неизменным.

Утверждения 2 и 3 позволяют модифицировать формулу Папковича-Фёппля для сжатого тонкостенного стержня открытого профиля:

$$\frac{1}{\lambda_{\mathrm{cr}}} = \frac{\lambda_{p,\mathrm{cr}}}{\lambda_{p,\mathrm{cr,new}}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i,\mathrm{cr}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i,\mathrm{cr,new}}}, \tag{8}$$

$$\lambda_{i,\mathrm{cr,new}} = \lambda_{i,\mathrm{cr}} \frac{\lambda_{p,\mathrm{cr,new}}}{\lambda_{p,\mathrm{cr}}}, \quad i = \overline{1,\ n}, \tag{9}$$

где p – любое целое положительное число от 1 до n; new – метка, маркирующая критическое значение параметра нагрузки после изменения размеров поперечного сечения стержня (после наложения на стержень дополнительных связей).

Такая модификация формулы Папковича-Фёппля предполагает вычисление собственного значения пары матриц один раз (при определении значения $\lambda_{p,\mathrm{cr,new}}$), а не n раз, в чем и заключается значимость предложенной модификации.

3. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим расчетную схему стойки, изображенную на рисунке 1.

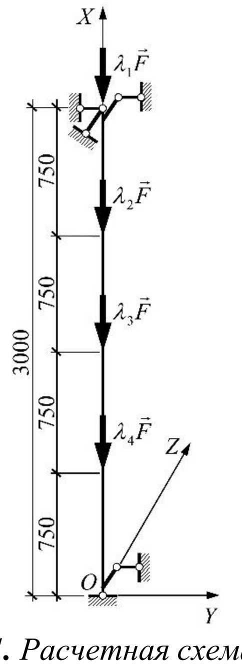

Рисунок 1. *Расчетная схема стойки (составлено/разработано автором)*

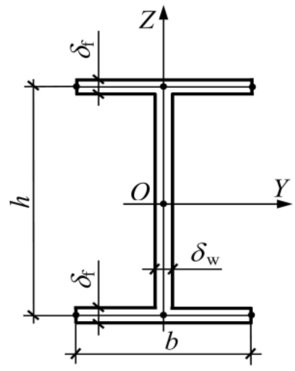

Рисунок 2. *Поперечное сечение стойки (составлено/разработано автором)*

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Условия закрепления верхнего и нижнего концов стойки:

- отсутствует продольное перемещение центра тяжести нижнего поперечного сечения стойки;
- отсутствуют поперечные перемещения центров изгиба верхнего и нижнего поперечных сечений стойки;
- отсутствуют повороты верхнего и нижнего поперечных сечений стойки вокруг ее продольной оси.

Концевые поперечные сечения этой стойки могут свободно депланировать.

Материалом стойки является сталь с модулем упругости $E = 2{,}0 \cdot 10^5$ МПа и модулем сдвига $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа.

Рассмотрим несколько вариантов стойки.

Вариант 1. Примем поперечное сечение стойки согласно рисунку 2 с размерами $h = 300$ мм, $b = 300$ мм, $\delta_{\mathrm{w}} = 5$ мм и $\delta_{\mathrm{f}} = 10$ мм.

Вариант 2. Примем поперечное сечение стойки согласно рисунку 2 с размерами $h = 300$ мм, $b = 300$ мм, $\delta_{\mathrm{w}} = 10$ мм и $\delta_{\mathrm{f}} = 5$ мм.

Вариант 3. Этот вариант отличается от варианта 1 тем, что по середине длины стойки имеется закрепление, обеспечивающее отсутствие поворота поперечного сечения стойки вокруг ее продольной оси.

В таблице приведены полученные автором значения $\lambda_{i,\mathrm{cr}} / \lambda_{4,\mathrm{cr}}$ $(i = \overline{1,\ 4})$ для каждого из этих вариантов.

Таблица

Значения $\lambda_{i,\mathrm{cr}}/\lambda_{4,\mathrm{cr}}$ $(i=\overline{1,\ 4})$

Номер варианта стойки	$\lambda_{1,\mathrm{cr}} / \lambda_{4,\mathrm{cr}}$	$\lambda_{2,\mathrm{cr}} / \lambda_{4,\mathrm{cr}}$	$\lambda_{3,\mathrm{cr}} / \lambda_{4,\mathrm{cr}}$	$\lambda_{4,\mathrm{cr}} / \lambda_{4,\mathrm{cr}}$
1	0,477	0,735	0,897	1
2	0,473	0,734	0,894	1
3	0,473	0,732	0,893	1

Составлено (разработано) автором

Форма потери устойчивости в первом варианте стойки – крутильная, а во втором и третьем – изгибная.

Данные представленной таблицы подтверждают утверждения 2 и 3.

4. Заключение

Предложена модификация формулы Папковича-Фёппля для сжатого тонкостенного стержня открытого профиля. Эта модификация позволяет учесть изменение размеров поперечного сечения стержня (а также наложение на стержень дополнительных связей). Модификация предполагает вычисление собственного значения пары матриц жесткости и начальных напряжений (геометрической жесткости) один раз. Это достигается за счет того, что при достаточно малом изменении размеров поперечного сечения сжатого тонкостенного стержня открытого профиля (а также при наложении на стержень дополнительных связей) отношение критических значений параметров нагрузки остается практически неизменным.

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Предложенная формула может использоваться при оптимизации размеров поперечного сечения стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов, В.З. Тонкостенные упругие стержни / В.З. Власов. – М.: Физматиздат, 1958. – 568 с.
2. Hooke, R. Lectures De Potentia Restitutiva or of Spring Explaining the Power of Springing Bodies / R. Hooke. – London: J. Martyn, 1678. – 56 p.
3. Папкович, П.Ф. Труды по строительной механике корабля / П.Ф. Папкович. – Л.: Судпромиздат, 1963. – Т. 4. – 552 с.
4. Föppl, L. Über das Ausknicken von Gittermasten, insbesondere von hohen Funktürmen / L. Föppl // ZAMM (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik). – 1933. – 13. – Pp. 1-10.
5. Kollár, L. Structural Stability in Engineering Practice / Ed. L. Kollár. – London; New York, NY: E & FN Spon, 1999. – 454 p.
6. Nudel'man, Ja.L. On an overlay method in stability problems of elastic systems / Ja.L. Nudel'man and V.A. Kronberg // Research on the Theory of Structures. – 1963. – 12. – Pp. 89-100.
7. Бычков, Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций / Д.В. Бычков. – М.: Стройиздат, 1962. – 476 с.
8. Ижендеев, А.В. Формирование матрицы начальных напряжений тонкостенного стержня открытого профиля / А.В. Ижендеев // Известия вузов. Строительство. – 2013. – № 1. – С. 119-125.
9. Bryan, G.H. On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane, with applications to the "buckling" of the sides of a ship / G.H. Bryan // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1890. – vol. s1-22. – 1. – Pp. 54-67.
10. Trefftz, E. Über die Ableitung der Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichtes aus der Elastizitätstheorie endlicher Deformationen / E. Trefftz // Proceedings of the Third International Congress of Applied Mechanics. – 1930. – vol. 3. – Pp. 44-50.
11. Strang, G. Linear algebra and its applications / G. Strang. – New York: Academic Press, 1976. – 374 p.
12. Перельмутер, А.В. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том 1 / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: СКАД СОФТ, 2010. – 704 с.

Izhendeev Alexey Valerievich
Far eastern state agrarian university, Blagoveshchensk, Russia
E-mail: alex_izhendeev@mail.ru

Calculation of the critical factor of a multi-parameter load compressing a thin-walled rod with an open profile

Abstract. In this article the object of the research is a thin-walled rod of open cross-section. We accept two kinematic assumptions of Vlasov V.Z.:

1. the configuration of the cross-section in its own plane remains unchanged during deformation;
2. the shear strain vanishes at the middle surface of the cross-section. Suppose the material of the rod obeys R. Hooke's law.

The rod is compressed by a multi-parameter load. We can judge about stability of a rod using a critical load factor. It is known that the critical multi-parameter load factor can be calculated by the formula of Papkovich and Föppl. This formula depends on the critical values of each load factors. The change in the cross-section dimensions of the rod can lead to a change in the critical values of the load factors. These critical values can also change when additional connections are placed on the rod. Calculating absolutely all the changed critical values requires a large number of calculations. Therefore, it is important to reduce the number of such computations. The author presents a modification of the formula of Papkovich and Föppl. This modification takes into account the change in cross-section dimensions of the rod and the addition of additional bonds to the rod. This modification implies calculation of the eigenvalue of a pair of matrices one time. In this paper, we use the matrix of initial stresses proposed by the author in his early work. The elements of this matrix were obtained using the energy criterion of stability (the variation principle) of G. Bryan and E. Trefftz. The presented modification of the formula of Papkovich-Föppl can be used to optimize cross-section dimensions of a compressed thin-walled rod with an open profile.

Keywords: thin-walled rod; open profile; compression; multi-parameter load; stability; critical load factor; finite element method; initial stress matrix